Offensichtlich gilt für jeden Eigenwert λ von M: $|\lambda| \leq \|M\|$.

(ii) Ebenso wie in (i) findet man als Eigenwerte die Punkte $\lambda_n = n$ mit Eigenräumen

$$E_{\lambda_n} = \operatorname{span}\{e_n\}.$$

Die Folge $(\lambda_n)_n$ ist unbeschränkt, und für den Operator M gilt dasselbe, da

$$|Me_n| = n \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

(natürlich $e_n \in \operatorname{dom} M \ \forall n$.)

Aufgabe 4

1. Schritt: Für $A \subseteq [0,1]$ setzen wir

$$\omega(A) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in A\} \quad (\leq \infty)$$

und für $x_0 \in [0,1]$

$$\omega(x_0) := \lim_{\delta \searrow 0} \omega(B(x_0, \delta)).$$

f ist genau dann stetig in x_0, wenn $\omega(x_0) = 0$ gilt.

Für den Beweis des ersten Rezeptteils sei $\varepsilon > 0$. Dann ist

$$W_\varepsilon := \{x \in [0,1] : \omega(x) < \varepsilon\} \text{ offen:}$$

Sei $x_0 \in W_\varepsilon$. Dann $\omega(x_0) < \varepsilon$, also ex. $\delta > 0$: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon \ \forall x, y \in B(x_0, \delta)$. Sei $z \in B(x_0, \delta/2)$. Für $z_1, z_2 \in B(z, \delta/2)$ gilt dann $z_1, z_2 \in B(x_0, \delta)$ und daher $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$, also $z \in W_\varepsilon \Rightarrow W_\varepsilon$ offen.

Außerdem gilt

$$\{x \in [0,1] : \omega(x) = 0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} W_{1/n}.$$

Dann ist die Menge der Unstetigkeitsstellen von f gerade ③

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{[0,1] \setminus W_{1/n}}_{\text{abg.}} .$$

(Abgeschlossenheit bzw. Offenheit immer bzgl. der relat. Top. <u>auf $[0,1]$</u>.)

<u>2. Schritt:</u> Wir zeigen, dass die Menge $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ nicht Vereinigung von abzählbar vielen abgeschl. Mengen ist.

Angenommen, $\exists\, A_j \subseteq [0,1]$ abg., $j \in \mathbb{N}$: $[0,1] \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$.

Keines der A_j enthält einen inneren Punkt, da sonst $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ ein offenes Intervall enthielte. Sei $(x_n)_n$ ein Abzählung von $[0,1] \cap \mathbb{Q}$. Dann

$$[0,1] = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \{x_j\} \right),$$

also ist $[0,1]$ Vereinigung abzählbar vieler abgeschl. Mengen, von denen keine einen inneren Punkt enthält. Da $[0,1]$ vollständig ist, widerspricht das dem Satz von Baire.