Christian Kühn, Jonathan Rohleder, 2010
(mit freundlicher Unterstützung von Sarah Stubenvoll)

Die Varianten des Satzes von Baire

Der Satz von Baire lässt sich auf (mindestens) drei unterschiedliche Arten formulieren:

Satz von Baire 1.0
Seien X ein vollständiger metrischer Raum und $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von abgeschlossenen Teilmengen von X mit $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = X$. Dann existiert ein $i \in \mathbb{N}$, so dass die Menge A_i einen inneren Punkt enthält.

Satz von Baire 1.0.1
Seien X ein vollständiger metrischer Raum und $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von abgeschlossenen Teilmengen von X, so dass $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ einen inneren Punkt enthält. Dann existiert ein $i \in \mathbb{N}$, so dass die Menge A_i einen inneren Punkt enthält.

Satz von Baire 2.0
Seien X ein vollständiger metrischer Raum und $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von offenen, dichten Teilmengen von X. Dann ist $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i$ dicht in X.

Diese drei Versionen sind äquivalent. Dabei ist nur die Implikation von Version 1.0 zu Version 1.0.1 nicht offensichtlich. Man kann sie auf folgende Art einsehen:

Seien A_i, $i \in \mathbb{N}$, abgeschlossene Mengen in X, so dass $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ einen inneren Punkt enthält. Damit ist

$$\widetilde{X} := \overline{\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^{\circ}}$$

nichtleer. Da X vollständig und $\widetilde{X}$ abgeschlossen ist, ist $\widetilde{X}$ mit der Spurtopologie $\widetilde{\tau}$ vollständig. Mit $\widetilde{A}_0 := \widetilde{X} \setminus (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)^{\circ}$ und $\widetilde{A}_i = \widetilde{X} \cap A_i$, $i \in \mathbb{N}$, ergibt sich

$$\widetilde{X} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \widetilde{A}_i.$$

Version 1.0 des Satzes von Baire liefert nun, dass ein $i \in \mathbb{N}_0$ existiert, so dass $\widetilde{A}_i$ einen (bzgl. $\widetilde{\tau}$) inneren Punkt enthält. Dieses i kann aber nicht der Index null sein, denn $\widetilde{X} \setminus \widetilde{A}_0$ ist dicht in $\widetilde{X}$.

Es bleibt zu beweisen, dass A_i auch einen (bezüglich der von der Metrik auf X erzeugten Topologie) inneren Punkt enthält. Das lässt sich etwas allgemeiner in folgender Form zeigen:

Lemma. *Sei X ein metrischer Raum, $A \subseteq X$ offen und nichtleer und $\widetilde{X} := \overline{A}$ mit der Spurtopologie $\widetilde{\tau}$ ausgestattet. Dann gilt: Zu jeder nichtleeren, $\widetilde{\tau}$-offenen Menge $\widetilde{U} \subseteq \widetilde{X}$ existiert eine nichtleere, offene Menge $\mathcal{O} \subseteq \widetilde{U}$.*

Beweis. Wähle $U \subseteq X$ offen mit $\widetilde{U} = U \cap \widetilde{X}$. (So ist die Spurtopologie ja gerade gebaut!) Sei

$$x \in \widetilde{U} = U \cap \widetilde{X} = U \cap \overline{A}. \tag{1}$$

Da U offen und $x \in U$ ist, existiert $\varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \subseteq U$. Damit ist aber $U \cap A$ nichtleer: Wegen (1) liegt x auch in $\overline{A}$, daher existiert eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$, mit $a_n \to x$, $n \to \infty$, und es existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $a_n \subseteq B(x, \varepsilon)$ für alle $n > N$ gilt. Insbesondere folgt $a_n \subseteq U \cap A$ für $n > N$. Es gilt nun

$$U \cap A = U \cap \widetilde{X} \cap A = \widetilde{U} \cap A \subseteq \widetilde{U},$$

also enthält $\widetilde{U}$ die nichtleere, offene Menge $\mathcal{O} := U \cap A$. $\square$