Jonathan Rohleder, 2010

Normierte Vektorräume

Die folgende Übersicht soll euch helfen den Überblick über die wichtigen Beispiele für normierte Vektorräume aus Vorlesung und Übung und über ihre Eigenschaften zu behalten. Der Lerneffekt ist hierbei besonders groß, wenn ihr euch beim Ausfüllen jeweils an die Beweise der Aussagen, Gegenbeispiele etc. erinnert (und natürlich an die Definitionen der Räume und Normen).

Raum	**vollständig**	**separabel**	**reflexiv**	**Dualraum $\cong$ zu**
$\mathbb{K}^n$				
$(c_0, \|\cdot\|_\infty)$				
$(c, \|\cdot\|_\infty)$				
$(\ell^1, \|\cdot\|_1)$				
$(\ell^p, \|\cdot\|_p)$, $1 < p < \infty$				
$(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$				
$(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$				
$(C([a,b]), \|\cdot\|_1)$				
$(C^1([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$				
$(C^1([a,b]), \|\cdot\|')$				
$(L^1(\Omega), \|\cdot\|_1)$				
$(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$, $1 < p < \infty$				
$(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$				

Wichtiger Hinweis: In der Literatur (und auch in dieser Lehrveranstaltung) werden die „Standard“-Normen zu den meisten der obigen Vektorräume nicht immer explizit angegeben, die Räume werden aber implizit immer als mit dieser Norm ausgestattet betrachtet. In diesem Sinn sind aufzufassen:

* $C([a,b])$ als $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$;
* $C^1([a,b])$ als $(C^1([a,b]), \|\cdot\|')$;
* ℓ^p als $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$, $1 \le p \le \infty$;
* $L^p(\Omega)$ als $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$, $1 \le p \le \infty$.

Warum wählt man üblicherweise gerade diese Normen? Welche Norm soll man als „Standard“ auf $\mathbb{K}^n$ ansehen?