Orthonormalbasen

Definition 5.10

Sei $\mathcal{X}$ ein Hilbertraum. $S \subseteq \mathcal{X}$ heißt *Orthonormal-system* (ONS), falls für alle $e, f \in S$ gilt: $\|e\| = 1$ und $(e, f) = 0$, falls $e \neq f$. S heißt *Orthonormalbasis* (ONB), falls für jedes ONS T mit $S \subseteq T$ bereits $S = T$ gilt.

Beispiele

- $S = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ in ℓ^2 ist ONB
- $S = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{1}\} \cup \{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) : n \in \mathbb{N}\}$ in $L^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$ ist ONB.
- In $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$: $S = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} : n \in \mathbb{N}\}$.

Satz 5.11 (Gram-Schmidt)

Sei $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{X}$ linear unabhängig in $\mathcal{X}$. Dann ex. eine ONS S mit $\operatorname{span} S = \operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Satz 5.12 (Besselsche Ungleichung)

Sei $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ein ONS in $\mathcal{X}$ und sei $x \in \mathcal{X}$. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \leq \|x\|^2.$$

Beweis Sei $N \in \mathbb{N}$ und $x_N = x - \sum_{n=1}^{N} (x, e_n) e_n$.

Dann gilt für $1 \leq k \leq N$

$$(x_N, e_k) = (x, e_k) - \sum_{n=1}^{N} (x, e_n)(e_n, e_k) = 0,$$

d.h. $x_N \perp e_k$. Mit dem Satz des Pythagoras folgt

$$\|x\|^2 = \|x_N + \sum_{k=1}^{N} (x, e_n) e_n\|^2 = \|x_N\|^2 + \|\sum_{k=1}^{N} (x, e_n) e_n\|^2$$

$$= \|x_N\|^2 + \sum_{k=1}^{N} |(x,e_n)|^2 \geq \sum_{k=1}^{N} |(x,e_n)|^2.$$

Es folgt für $N \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x,e_n)|^2 \leq \|x\|^2. \qquad \square$$

Satz 5.13 Jeder Hilbertraum hat eine ONB.

Beweis: Zornsches Lemma, ...

Satz 5.14 Sei $\mathcal{X}$ ein Hilbertraum und $S = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine ONS. Dann sind äquivalent:

(i) S ist ONB.

(ii) $\mathcal{X} = \overline{\operatorname{span} S}$

(iii) $x = \sum_{n=1}^{\infty} (x,e_n) e_n \quad \forall x \in \mathcal{X}$.

(iv) $(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x,e_n)(e_n,y) \quad \forall x,y \in \mathcal{X}$.

(v) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x,e_n)|^2$ (Parsevalsche Gleichung).

Beweis

(i) ⇒ (ii): Ang. $\overline{\operatorname{span} S} \neq \mathcal{X}$. Dann $(\overline{\operatorname{span} S})^\perp \neq \{0\}$, daher ex. $x \in \mathcal{X}$, $\|x\| = 1$, mit $x \perp \operatorname{span} S$. Damit ist $S \cup \{x\}$ ein ONS, Widerspruch.

(ii) ⇒ (iii): Für $M, N \in \mathbb{N}$, $M > N$, gilt

$$\Big\| \sum_{n=N}^{M} (x,e_n) e_n \Big\|^2 \underset{\text{Pythagoras}}{=} \sum_{n=N}^{M} |(x,e_n)|^2 \longrightarrow 0, \quad N, M \to \infty$$

(da die Reihe nach der Besselschen Ungleichung konvergiert).

Damit ist $\left(\sum_{n=1}^{M} (x,e_n) e_n \right)_{M \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und konvergiert gegen $\sum_{n=1}^{\infty} (x,e_n) e_n$. Für jedes feste $N \in \mathbb{N}$ gilt außerdem

$$\left(x - \sum_{n=1}^{\infty} (x,e_n) e_n,\ e_N \right) = (x,e_N) - (x,e_N) = 0,$$

daher auch für $z \in \operatorname{span} S$

$$\Big(x - \sum_{n=1}^{\infty} (x,e_n) e_n ,\ z \Big) = 0. \qquad (*)$$

Stetigkeit des SP impliziert mit (ii), dass (*) für alle $z \in \mathcal{X}$ gilt, also $x = \sum_{n=1}^{\infty} (x,e_n) e_n$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv):
$$(x,y) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} (x,e_n) e_n ,\ \sum_{m=1}^{\infty} (y,e_m) e_m \Big)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (x,e_n) (e_n, (y,e_n) e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (x,e_n) \overline{(y,e_n)}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (x,e_n)(e_n,y).$$

(iv) $\Rightarrow$ (v): Setze $x=y$.

(v) $\Rightarrow$ (i): Ang. S ist keine ONB. Dann ex. $x \in \mathcal{X}$, $\|x\|=1$, s.d. $S \cup \{x\}$ ONS ist. Aber nach (v) gilt

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x,e_n)|^2 = 0, \quad \lightning$$

$\square$

<u>Bemerkung:</u>

Falls eine der äquivalenten Bedingungen in Satz 5.14 gilt, ist $\mathcal{X}$ separabel, da S abzählbar mit $\overline{\operatorname{span} S} = \mathcal{X}$ ist.

<u>Satz 5.15</u> Sei $\mathcal{X}$ ein Hilbertraum. Dann sind äquivalent:

(i) $\mathcal{X}$ ist separabel.

(ii) Jede ONB von $\mathcal{X}$ ist ~~abzählbar~~ abzählbar.

(iii) Es ex. eine abzählbare ONB von $\mathcal{X}$.

<u>Beweis</u> (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei S ONB von $\mathcal{X}$. Ang. S nicht abzählbar. Für $e, f \in S$, $e \neq f$, gilt $\|e-f\|^2 = 2$. Sei $M \subseteq \mathcal{X}$ abzählbar und dicht. Setze

$$K_x := \{ y \in \mathcal{X} : \|x - y\| \leq \tfrac{1}{4} \} \quad \forall\, x \in M.$$

Dann

$$\mathcal{X} = \bigcup_{x \in M} K_x .$$

Andererseits enthält jede Menge K_x höchstens ein Element von S. $\lightning$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): klar.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Satz 5.14 (ii) bzw. Bemerkung. $\square$

Operatoren in Hilberträumen

Satz und ~~Definition~~ 5.10

Definition 5.10 Seien $\mathcal{X}, \mathcal{K}$ Hilberträume und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{K})$. Dann ex. ein eindeutiger Operator $T^*: \mathcal{K} \to \mathcal{X}$, der

$$(Tx, y)_{\mathcal{K}} = (x, T^* y)_{\mathcal{X}} \qquad \forall\, x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{K}$$

erfüllt. T^* heisst der zu T adjungierte Operator.

Beweis Sei $y \in \mathcal{K}$. Nach dem Satz von Fréchet-Riesz ex. ein eindeutiges $z \in \mathcal{X}$ mit

$$(Tx, y)_{\mathcal{K}} = (x, z)_{\mathcal{X}} \qquad \forall\, x \in \mathcal{X}.$$

Setze $T^* y := z$. Dann gilt

$$\|T^* y\| = \sup_{\|x'\| = 1} |x'(T^* y)| = \sup_{\|x\| = 1} |(T^* y, x)|$$

$$= \sup_{\|x\| = 1} |(y, Tx)| \leq \|y\| \cdot \|T\|, \qquad (*)$$

also ist T^* stetig (und $\|T^*\| \leq \|T\|$). $\square$

Bemerkung

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{H} \arrow[r, shift left, "T"] \arrow[d, "\Phi"'] & \mathcal{K} \arrow[l, shift left, "T^*"] \arrow[d, "\Psi"] \\
\mathcal{H}' & \mathcal{K}' \arrow[l, "T'"']
\end{tikzcd}
$$

ist kommutativ: Für $y \in \mathcal{K}, x \in \mathcal{H}$

$$(T'(\Psi y))x = (\Psi y)(Tx) = (Tx, y)_{\mathcal{K}}$$

und

$$(\Phi(T^* y))x = (x, T^* y)_{\mathcal{H}} = (Tx, y)_{\mathcal{K}},$$

also $\Phi \circ T^* = T' \circ \Psi$ bzw. $T^* = \Phi^{-1} T' \Psi$.

Satz 5.17 Seien $\mathcal{H}, \mathcal{K}, \mathcal{G}$ Hilberträume und $S, T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, $R \in \mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathcal{G})$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gelten:

(a) $(S+T)^* = S^* + T^*$ und $(\lambda S)^* = \bar{\lambda} S^*$.

(b) $(RS)^* = S^* R^*$.

(c) $\|S\| = \|S^*\|$ und $S^{**} = S$.

(d) $\ker S = (\operatorname{ran} S^*)^\perp$ und $\ker S^* = (\operatorname{ran} S)^\perp$.

Beweis (a), (b) Übung.

(c) folgt aus $\|T\| = \|T'\|$ und der Isometrie von Φ und Ψ.

(d) Sei $x \in \ker S$, $S^*z = y \in \operatorname{ran} S^*$. Dann

$$(y, x) = (S^* z, x) = (z, \underbrace{Sx}_{=0}) = 0,$$

also $x \in (\operatorname{ran} S^*)^\perp$. Sei umgekehrt $x \in (\operatorname{ran} S^*)^\perp$, d.h.

$$0 = (x, S^* y) = (Sx, y) \quad \forall y \in \mathcal{K},$$

also $Sx = 0$, d.h. $x \in \ker S$.

Die zweite Gleichung folgt analog. □

Definition 5.18 Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $T = T^*$. Dann heißt T selbstadjungiert.

Beispiele
- $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch
- T : $L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$,
$$(Tf)(s) = \int_0^1 k(s,t) f(t)\, dt$$
mit $k(s,t) = \overline{k(t,s)}$, $k \in L^2([0,1]^2)$.

Satz 5.19 (Hellinger-Töplitz)

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein lin. Operator mit
$$(Tx, y) = (x, Ty) \qquad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$
Dann $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $T = T^*$.

Beweis Nach dem Satz vom abgeschl. Graphen reicht es zu zeigen, dass T abgeschlossen ist. Sei $(x_n)_n \subseteq \mathcal{H}$, $x_n \to x$, $Tx_n \to y$, $n \to \infty$. Dann $x \in \operatorname{dom} T = \mathcal{H}$ klar. Für $z \in \mathcal{H}$ gilt
$$(y, z) = \lim_{n\to\infty} (Tx_n, z) = \lim_{n\to\infty} (x_n, Tz) = (x, Tz)$$
$$= (Tx, z),$$
also $Tx = y$. Es folgt $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. $\square$

Satz 5.20 Sei ~~...~~ $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$ und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Dann ~~gelten~~ sind äquivalent

(i) $T = T^*$ und (ii) $(Tx, x) \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathcal{H}$.

Beweis

(i) ⇒ (ii): $(Tx, x) = (x, T^* x) = (\cancel{T^*}x, Tx) = \overline{(Tx, x)}$.

(ii) ⇒ (i): Seien $\lambda \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathcal{H}$. Dann

$$\mathbb{R} \ni (T(x+\lambda y), x+\lambda y) = (Tx, x) + \bar{\lambda}(Tx, y) + \lambda(Ty, x) + |\lambda|^2 (Ty, y)$$

$$\underset{\text{kompl. Konj.}}{=} (Tx, x) + \lambda(y, Tx) + \bar{\lambda}(x, Ty) + |\lambda|^2 (Ty, y)$$

Für $\lambda = 1$ folgt

$$\cancel{(T(x+y), x+y) = (Tx, x) + \lambda(y, Tx) + \bar{\lambda}(x, Ty) + (Ty, y).}$$

~~Für $\lambda = i$ folgt~~

$$\cancel{(T(x+iy), x+iy) =}$$

$$(Tx, y) + (Ty, x) = (y, Tx) + (x, Ty).$$

Für $\lambda = i$ folgt

$$-i(Tx, y) + i(Ty, x) = i(y, Tx) - i(x, Ty),$$

also insgesamt

$$(Ty, x) = (y, Tx). \qquad \square$$

Satz 5.21

Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ selbstadjungiert. Dann

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \le 1} |(Tx, x)|.$$

Beweis

„$\geq$": $\sup_{\|x\| \le 1} |(Tx, x)| \le \sup_{\|x\| \le 1} \|T\| \cdot \|x\|^2 = \|T\|$.

„≤": Setze $M := \sup\limits_{\|x\| \le 1} |(Tx, x)|$. Dann

$$(T(x+y), x+y) - (T(x-y), x-y)$$

$$= (Tx,x) + (Ty,x) + (Tx,y) + (Ty,y)$$
$$- (Tx,x) + (Ty,x) + (Tx,y) - (Ty,y)$$

$$= 2(Ty,x) + 2(Tx,y)$$

$$= 2(Tx,y) + 2\overline{(Tx,y)}$$

$$= \cancel{4}\ 4 \operatorname{Re}(Tx,y)$$

Es folgt

$$4 \operatorname{Re}(Tx,y) \le \left| \left(T\left(\frac{x+y}{\|x+y\|}\right), \frac{x+y}{\|x+y\|} \right) \right| \cdot \|x+y\|^2$$

$$+ \left| \left(T \frac{x-y}{\|x-y\|}, \frac{x-y}{\|x-y\|} \right) \right| \cdot \|x-y\|^2$$

$$\le M\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right) \overset{\text{Parall.-Gl.}}{=} M\left(2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\right).$$

Für $x, y \in \mathcal{X}$, $\|x\| \le 1$, $\|y\| \le 1$, gilt dann $\operatorname{Re}(Tx,y) \le M$.

Aus $(Tx,y) = |(Tx,y)| \cdot e^{i\alpha}$ folgt

$$\mathbb{R} \ni |(Tx,y)| = (Tx,y) \cdot e^{-i\alpha} = (Tx, e^{i\alpha} y)$$

$$= \operatorname{Re}(Tx, e^{i\alpha} y) \le M.$$

Also

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Tx\| \underset{\substack{\text{Normen-}\\ \text{Formel}}}{=} \sup_{\|y\| \le 1} \sup_{\|x\| \le 1} |(Tx,y)| \le M.$$

$\square$

Definition 5.22 Sei $\mathcal{H}$ Hilbertraum, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Ein Punkt $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert von T, falls $\ker(T-\lambda) \neq \{0\}$ gilt. Ein Vektor $f \in \mathcal{H}$, $f \neq 0$, mit $(T-\lambda)f = 0$ heißt Eigenvektor von T zum Eigenwert λ. Notation: $\lambda \in \sigma_p(T)$

Lemma 5.23

Seien $T = T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\lambda, \mu \in \sigma_p(T)$, $\lambda \neq \mu$. Dann $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $\ker(T-\lambda) \perp \ker(T-\mu)$.

Beweis Seien $f \in \ker(T-\lambda)$, $g \in \ker(T-\mu)$. O.B.d.A. $\lambda \neq 0$. Dann

$$(f,g) = \frac{1}{\lambda}(Tf,g) = \frac{1}{\lambda}(f,Tg) = \frac{1}{\lambda}(f,\mu g) = \frac{\bar{\mu}}{\lambda}(f,g)$$

also $\frac{\bar{\mu}}{\lambda} = 1$ oder $(f,g) = 0$. Für $\mu = \lambda$ ~~folgt~~ und $g = f$ folgt $\bar{\lambda} = \lambda$, also $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann folgt aus $\bar{\mu} = \mu \neq \lambda$, dass $\frac{\bar{\mu}}{\lambda} \neq 1$, also $(f,g) = 0$. □

Satz 5.24

Sei $T = T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, T kompakt. Dann ist $\|T\|$ oder $-\|T\|$ ein Eigenwert von T.

Beweis Der Fall $T = 0$ ist klar. Sei $T \neq 0$. Nach Satz 5.21 ex. eine Folge $(h_n)_n$, $\|h_n\| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, mit $|(Th_n, h_n)| \to \|T\|$. Außerdem gilt $(Th_n, h_n) \in [-\|T\|, \|T\|]$ $\forall n \in \mathbb{N}$ wegen $T = T^*$. Daher ex. eine Teilfolge $(Th_{n_k}, h_{n_k})_k$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $|\lambda| = \|T\|$, so dass $(Th_{n_k}, h_{n_k}) \to \lambda$, $k \to \infty$, gilt.

Es folgt

$$0 \le \| (T-\lambda) h_{n_k} \|^2 = \| T h_{n_k} \|^2 - 2\lambda (T h_{n_k}, h_{n_k}) + \lambda^2$$

$$\le \underbrace{\|T\|^2}_{=\lambda^2} \cdot \underbrace{\|h_{n_k}\|^2}_{=1} - 2\lambda \underbrace{(T h_{n_k}, h_{n_k})}_{\to \lambda} + \lambda^2$$

$$\to 0, \quad k \to \infty.$$

Damit folgt $(T-\lambda) h_{n_k} \to 0$, $k \to \infty$. Da T kompakt ist, ex. eine Teilfolge $(h'_{n_k})_k$ von $(h_{n_k})_k$ mit $T h'_{n_k} \to f \in \mathcal{H}$. Es folgt $\lambda h'_{n_k} \to f$ und damit $f \neq 0$, denn $\| \lambda h'_{n_k} \| = |\lambda| \neq 0$.

Dann ist

$$f = \lim_{k \to \infty} T h'_{n_k} = T \frac{1}{\lambda} f,$$

also $T f = \lambda f$. Es folgt, dass $\lambda = \|T\|$ oder $\lambda = -\|T\|$ ein EW von T ist. $\square$

Spektralsatz für kompakte, selbstadjungierte Operatoren

Satz 5.25 Sei T ein kompakter, selbstad. Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$.

(i) T hat höchstens abzählbar viele Eigenwerte $\lambda_n \neq 0$, und die Folge $(\lambda_n)_n$ ~~[illegible]~~ konvergiert gegen 0.

(ii) Wenn P_n die Orthogonalprojektion auf $\ker(T-\lambda_n)$ bezeichnet, dann

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$$

(Reihe konvergiert in Op.-Norm.)

(iii) $\exists$ ONB $\{e_n\}$ von $(\ker T)^\perp$, so dass $Th = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (h, e_n) e_n$, $h \in \mathcal{H}$.

Insbes. ex. eine ONB von $\mathcal{H}$ aus EV von T.