Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. J. Liesen, O. Sète

SoSe 2010
http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS10/LinA1/
Stand: 11. Mai 2010

Lineare Algebra I
4. Hausaufgabe

Abgabe: 19.05.2010 **vor** der Vorlesung

Ab der 4. Hausaufgabe werden Einzelabgaben nicht mehr gewertet.

1. Aufgabe (3 Punkte)

In HA 3-4 wurde gezeigt, dass $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ genau dann ein Körper ist, wenn n eine Primzahl ist. Sei $n = 5$. Bestimmen Sie für jedes $[k] \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\backslash\{[0]\}$ die Inverse (bzgl. der Multiplikation).

2. Aufgabe (4 Punkte)

Berechnen Sie (falls möglich) CA, BC, B^TA, A^TC, $(-A)^TC$, B^TA^T, AC, CB, wobei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(alle über } \mathbb{R}\text{)}.$$

3. Aufgabe (3 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ eine Matrix mit $A^m = I_n$, wobei $m \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft ist. (Insbesondere ist $m > 0$.) Bestimmen Sie die Mächtigkeit der Menge $\{A^k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Schreiben Sie A^{-1} als Potenz von A mit positivem Exponenten.

4. Aufgabe (4 Punkte)

Sei K ein Körper mit $1 + 1 \neq 0$. Zeigen Sie, dass sich jede Matrix $A \in K^{n,n}$ als Summe einer symmetrischen Matrix M (d.h. $M^T = M$) und einer schiefsymmetrischen Matrix S (d.h. $S^T = -S$) schreiben lässt.
Gilt dies auch im Fall eines Körpers mit $1 + 1 = 0$? (Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.)

5. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Eine Teilmenge $S \subseteq R$ heißt *Unterring* von R, falls $(S, +, \cdot)$ ein Ring ist. Wie bei Körpern zeigt man, dass $S \neq \varnothing$ genau dann ein Unterring von R ist, falls S die folgenden drei Eigenschaften erfüllt:

(i) $0_R \in S$,

(ii) für $r, s \in S$ sind $r + s \in S$ und $r \cdot s \in S$,

(iii) für $r \in S$ ist $-r \in S$.

(Diese Charakterisierung dürfen Sie ohne Beweis verwenden.)

Sei nun $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins. Es sei $(R^{n,n}, +, \cdot)$ der Ring der $n \times n$-Matrizen und sei die Menge $A^{n,n}$ durch

$$A^{n,n} := \left\{ \left[a_{i,j}\right] \,\middle|\, a_{n,j} = 0 \text{ für } j = 1, 2, \ldots, n \right\} \subseteq R^{n,n}$$

gegeben.

(i) Zeigen Sie, dass $A^{n,n}$ ein Unterring von $R^{n,n}$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $A \cdot M \in A^{n,n}$ für alle $M \in R^{n,n}$ und $A \in A^{n,n}$ gilt.
(Ein Unterring mit dieser Eigenschaft heißt *Rechtsideal* von $R^{n,n}$.)

(iii) Finden Sie einen zu $A^{n,n}$ analogen Unterring $B^{n,n}$ von $R^{n,n}$, so dass $M \cdot B \in B^{n,n}$ für alle $M \in R^{n,n}$ und $B \in B^{n,n}$ gilt. Beweisen Sie ihre Aussage.
(Solch ein Unterring heißt *Linksideal* von $R^{n,n}$.)

Gesamtpunktzahl: 20