Technische Universität Berlin **SS 2014**
Fakultät II – Institut für Mathematik

Dozent: Prof. Dr. M. Scheutzow
Assistentin: M. Wilke Berenguer

Ausgabe: 22.04.2014
Abgabe: 29.04.2014

1. Übungsblatt „Maß- und Integrationstheorie“

Gesamtpunktzahl: 10 Punkte

1. Hausaufgabe: FORTSETZUNGEN VON $\hat{m}$ **5 Punkte**
Wir definieren für $A \subseteq E = [0,1]^2$ die Funktion

$$\eta(A) := \inf \Big\{ \sum_{k=1}^{n} m(R_k) \mid n \in \mathbb{N}, \bigcup_{k=1}^{n} R_k \supseteq A, R_1, \ldots, R_n \in \mathfrak{S} \Big\}.$$

Zeigen Sie, dass η auf $\mathfrak{E}$ mit $\hat{m}$ übereinstimmt. Zeigen Sie mit Hilfe der Menge $\{(x,y) | \, x, y \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\}$, dass η nicht subadditiv ist und somit nicht mit dem äußeren Maß λ^* übereinstimmt.

2. Hausaufgabe: LEBESGUE MESSBARE MENGEN **5 Punkte**
Zeigen Sie die folgende alternative Charakterisierung Lebesgue messbarer Mengen:
Für $A \subset [0,1]^2$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) A ist Lebesgue messbar (d.h. $A \in \mathfrak{A}_E$).

(ii) Für jede elementare Menge $B \in \mathfrak{E}_E$ gilt: $\hat{m}(B) = \lambda^*(B \cap A) + \lambda^*(B \setminus A)$.

3. Hausaufgabe: FORTSETZUNG DES ELEMENTARVOLUMENS VON QUADERN
Vortrag: 12 Minuten
Zeigen Sie, dass die Mengenfunktion $\hat{m}$ aus Definition 2.6 wohldefiniert ist.

4. Hausaufgabe: LIMES SUPERIOR UND LIMES INFERIOR VON MENGEN
Vortrag: 12 Minuten
Es sei Ω eine nicht-leere Menge und $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Mengenfolge mit $A_n \subset \Omega$. Wir definieren

$$\limsup_{n \to \infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{und} \quad \liminf_{n \to \infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Zeigen Sie:

(i) $\limsup_{n \to \infty} A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ ist in unendlich vielen } A_n \text{ enthalten}\}$ und
$\liminf_{n \to \infty} A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ ist in allen bis auf endlich vielen } A_n \text{ enthalten}\}$

(ii) $(\limsup_{n \to \infty} A_n)^c = \liminf_{n \to \infty} A_n^c$, sowie $(\liminf_{n \to \infty} A_n)^c = \limsup_{n \to \infty} A_n^c$.

(iii) $\liminf_{n \to \infty} A_n \subseteq \limsup_{n \to \infty} A_n$