Technische Universität Berlin **SS 2014**
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. M. Scheutzow Ausgabe: 29.04.2014
Assistentin: M. Wilke Berenguer Abgabe: 29.05.2014

2. Übungsblatt „Maß- und Integrationstheorie“

Gesamtpunktzahl: 10 Punkte

1. Hausaufgabe: LEBESGUE-(NULL) MENGEN **4 Punkte**

Eine Menge $N \subseteq E = [0,1]^2$ mit $\lambda^*(N) = 0$ heißt (Lebesgue-) Nullmenge.
Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(i) Alle Nullmengen sind Lebesgue-messbar.

(ii) Abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind Nullmengen.

(iii) Beliebige Vereinigungen von Nullmengen sind Nullmengen.

(iv) Jede abzählbare Teilmenge von E ist eine Nullmenge.

(v) Jede Nullmenge von E ist abzählbar.

(vi) Die Verbindungsstrecke von zwei beliebigen Punkten aus E ist eine Nullmenge.

Zeigen Sie nun, dass folgende Mengen Lebesgue-messbar sind:

(vii) $A := \{(x,y) \in E \mid x \text{ oder } y \in \mathbb{Q}\}$,

(viii) $B := \{(x,y) \in E \mid x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$.

2. Hausaufgabe: (SCHWACHE) DYNKIN-SYSTEME **6 Punkte**

Für ein Mengensystem $\mathcal{D}$ auf einer nicht-leeren Menge Ω und die Aussagen

(a) $\mathcal{D}$ erfüllt (i), (ii), (iii);

(b) $\mathcal{D}$ erfüllt (i), (ii'), (iii);

(c) $\mathcal{D}$ erfüllt (i), (ii'), (iii');

(d) $\mathcal{D}$ erfüllt (i), (ii), (iii');

zeigen Sie folgenden Implikationen: (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d).
Hierbei sind die Eigenschaften (i), (ii), (iii), (ii'), (iii') gemäß Definition 3.14 und der darauf folgenden Bemerkung gewählt.

3. Hausaufgabe: DIE BOREL-σ-ALGEBRA **Vortrag: 12 Minuten**

Stellen Sie mindestens 12 verschiedene Erzeuger der Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}$ vor.

4. Hausaufgabe: **Vortrag: 12 Minuten**

Beweisen Sie folgende Aussage:
Eine Sigma-Algebra $\mathfrak{A}$ auf einer Menge Ω ist entweder endlich oder überabzaehlbar unendlich.
Nehmen Sie hierzu an, dass $\mathfrak{A}$ höchstens abzählbar unendlich ist, betrachten Sie die Mengen $M_x := \bigcap_{B \in \mathfrak{A} : x \in B} B, x \in \Omega$ und die folgenden Hinweise:

(i) Zeigen Sie, dass $x \sim y :\Leftrightarrow x \in M_y$ eine Äquivalenzrelation auf Ω ist.

(ii) Sei I eine Menge von Repräsentanten. Zeigen Sie, dass I abzählbar ist und jedes Element von $\mathfrak{A}$ als Vereinigung der Mengen $M_x, x \in I$ geschrieben werden kann.