Technische Universität Berlin **SS 2014**

Fakultät II – Institut für Mathematik

Dozent: Prof. Dr. M. Scheutzow Ausgabe: 06.05.2014

Assistentin: M. Wilke Berenguer Abgabe: 13.05.2014

3. Übungsblatt „Maß- und Integrationstheorie“

Eindeutigkeit und Existenz von Fortsetzungen von Maßen

Gesamtpunktzahl: 10 Punkte

1. Hausaufgabe: **4 Punkte**

Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein durchschnittstabiles Mengensystem mit $\mathfrak{A} = \sigma(\mathcal{E})$. Weiterhin sei $\theta : \Omega \to \Omega$ eine Funktion mir der Eigenschaft, dass $\theta^{-1}(A) \in \mathfrak{A}$ für alle $A \in \mathfrak{A}$. Beweisen Sie folgende Aussage:

$$\forall G \in \mathcal{E} : \ \mu(G) = \mu(\theta^{-1}(G)) \qquad \Longrightarrow \qquad \forall A \in \mathfrak{A} : \ \mu(A) = \mu(\theta^{-1}(A)).$$

2. Hausaufgabe: **6 Punkte**

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum. Man nennt ein $N \in \mathcal{F}$ eine μ-*Nullmenge*, falls $\mu(N) = 0$ gilt. Weiterhin heißt $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *vollständig*, wenn jede Teilmenge einer μ-Nullmenge wiederum eine μ-Nullmenge ist, d.h. insbesondere in $\mathcal{F}$ enthalten ist.

Zeigen Sie:

(i) Die Vereinigung einer Folge von μ-Nullmengen ist wiederum eine μ-Nullmenge.

(ii) Jeder Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ kann vervollständigt werden, das heißt es existiert ein vollständiges Maß μ_0 auf einer σ-Algebra $\mathcal{F}_0 \supseteq \mathcal{F}$ auf Ω, sodass jedes μ fortsetzende, vollständige Maß ν gleichzeitig eine Fortsetzung von μ_0 ist.

Hinweis zu (ii): Zeigen Sie, dass $\{F \cup N \mid F \in \mathcal{F}, N \subset M, M \in \mathcal{F}, \mu(M) = 0\}$ eine σ-Algebra ist.

3. Hausaufgabe: **Vortrag: 12 Minuten**

Man betrachte das Mengensystem $\mathcal{E} := \{B \subset \mathbb{R} \mid B \text{ endlich } \}$ sowie die Abbildung $\mu : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ mit $\mu(B) = 0$ für alle $B \in \mathcal{E}$.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathcal{E}$ ein Ring ist und bestimmen Sie $\sigma(\mathcal{E})$.

(ii) Zeigen Sie weiterhin, dass es unendlich viele Fortsetzungen von μ zu einem Maß auf $\sigma(\mathcal{E})$ gibt. Vergleichen Sie dies mit den Ergebnissen aus der Vorlesung.

4. Hausaufgabe: **Vortrag: 12 Minuten**

(a) Sind $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ Semiringe in Ω_1 bzw. Ω_2, so ist

$$\mathfrak{S} := \left\{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathfrak{S}_1, A_2 \in \mathfrak{S}_2\right\}$$

ein Semiring in $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2$.

(b) Zeigen Sie, dass die zu (a) analoge Aussage für Ringe i.A. falsch ist.