Technische Universität Berlin **SS 2014**
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. M. Scheutzow
Assistentin: M. Wilke Berenguer

Ausgabe: 13.05.2014
Abgabe: 20.05.2014

4. Übungsblatt „Maß- und Integrationstheorie“

messbare Funktionen

Gesamtpunktzahl: 10 Punkte

1. Hausaufgabe: **6 Punkte**

Es sei $\mathcal{F}_0$ die Algebra in $\mathbb{Q}$, die von den links halboffenen Intervallen $(a, b] = \{\omega \in \mathbb{Q} | a < \omega \leq b\}$, $a, b \in \mathbb{Q}$ erzeugt wird. Sei außerdem $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F}_0)$. Zeigen Sie:

(i) $\mathcal{F}$ ist die Potenzmenge von $\mathbb{Q}$.

(ii) Das Zählmaß μ (d.h. $\mu(A)$ ist die Anzahl der Punkte in der Menge A) ist σ-endlich auf $\mathcal{F}$, aber nicht auf $\mathcal{F}_0$.

(iii) Es gibt Mengen $A \in \mathcal{F}$, deren Maß endlich ist, die aber nicht durch Mengen aus $\mathcal{F}_0$ approximiert werden können, d.h. es gibt keine Folge $A_n \in \mathcal{F}_0$ mit $\mu(A \triangle A_n) \to 0$.

(iv) Ist λ ein Maß mit $\lambda = 2\mu$, dann gilt zwar $\lambda = \mu$ auf $\mathcal{F}_0$, aber nicht auf $\mathcal{F}$.

Die Folgerungen 3.33 und 3.36 des Fortsetzungs- bzw. des Approximationssatzes können bei diesem Beispiel nicht angewandt werden. Welche der Voraussetzungen sind hier nicht erfüllt?

2. Hausaufgabe: **4 Punkte**

(i) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit höchstens abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen. Zeigen Sie, dass f $(\mathfrak{B}(\mathbb{R}), \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$-messbar ist.

(ii) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine nicht-fallende Funktion. Zeigen Sie mit Hilfe von (i), dass f $(\mathfrak{B}(\mathbb{R}), \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$-messbar ist.

3. Hausaufgabe: **Vortrag: 8 Minuten**

(i) Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von messbar numerischen Funktionen auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathfrak{A})$. Zeigen Sie, dass das punktweise Supremum $\sup\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ auch eine messbar numerische Funktion ist.

(ii) Es sei nun I eine beliebige Indexmenge und $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie von messbaren numerischen Funktionen. Zeigen Sie, dass das punktweise Supremum $\sup\{f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ nicht notwendigerweise messbar ist.

4. Hausaufgabe: **Vortrag: 12 Minuten**

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein endlicher Maßraum, und $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ zwei Teil-$\sigma-$Algebren von $\mathcal{F}$. Es bezeichne $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ die kleinste $\sigma-$Algebra in $\Omega^2 = \Omega \times \Omega$, welche alle Mengen der Gestalt $A_1 \times A_2$ mit $A_1 \in \mathcal{E}_1$ und $A_2 \in \mathcal{E}_2$ enthält. Zeigen Sie, dass ein eindeutiges Maß $\mu^{(2)}$ auf $(\Omega \times \Omega, \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2)$ existiert, welches

$$\mu^{(2)}(A_1 \times A_2) = \mu(A_1 \cap A_2)$$

für $A_1 \in \mathcal{E}_1, A_2 \in \mathcal{E}_2$ erfüllt. Interpretieren Sie $\mu^{(2)}$ geometrisch für beliebige $A \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$.
Hinweis: Stellen Sie $\mu^{(2)}$ als Bildmaß einer geeigneten messbaren Abbildung dar.