5. Übungsblatt „Maß- und Integrationstheorie“
Das Lebesgue-Integral und Konvergenzsätze

Gesamtpunktzahl: 10 Punkte

1. Hausaufgabe: 4 Punkte

Sei Ω eine überabzählbare Menge und sei $\mathcal{F}$ das System aller abzählbaren oder coabzählbaren (d.h. das Komplement ist abzählbar) Teilmengen von Ω. Aus der Übung ist bekannt, dass es sich hierbei um eine σ-Algebra handelt.

(i) Zeigen Sie, dass eine numerische Funktion $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ genau dann messbar ist, wenn sie auf einer (von der Funktion abhängigen) coabzählbaren Menge $A_f \in \mathcal{F}$ konstant ist.

Betrachten Sie die Abbildung $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$, die jedem abzählbaren $A \in \mathcal{F}$ den Wert 0 und jedem coabzählbaren $B \in \mathcal{F}$ den Wert ∞ zuordnet. Durch den ersten Vortrag in der vierten Übung ist Ihnen bekannt, dass es sich hierbei um ein Maß auf $\mathcal{F}$ handelt.

(ii) Bestimmen Sie alle μ-integrierbaren Funktionen sowie deren Integrale.

2. Hausaufgabe: 4 Punkte

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \to [0, \infty]$ eine messbare Funktion. Nach Folgerung 5.12 wird durch

$$\nu(F) := \int_F f \, d\mu$$

ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{F})$ definiert. Beweisen Sie, dass für jede messbare Funktion $g : \Omega \to [0, \infty]$ die Identität gilt:

$$\int_\Omega g \, d\nu = \int_\Omega f g \, d\mu.$$

3. Hausaufgabe: 2 Punkte

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{F} - \mathfrak{B}(\mathbb{R})$-messbare Funktion auf einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ so, dass durch

$$\forall A \in \mathcal{F} : \qquad \nu(A) := \int_A f \mathrm{d}\mu$$

ein Maß ν auf $(\Omega, \mathcal{F})$ definiert wird. Beweisen Sie, dass dann $f \geq 0$ $\mu-$f.ü. gilt.

4. Hausaufgabe: **Vortrag: 8 Minuten**

Es seien $E = [0,1]$ und λ das Lebesgue-Maß auf E. Durch $f_n(x) = ne^{-nx}$, $n = 1, 2, \ldots$ ist auf E eine Folge nichtnegativer Funktionen definiert. Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λ-f.ü. gegen eine Funktion f konvergiert, wobei

$$\int_E f \, d\lambda \neq \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\lambda$$

gilt. Weshalb ist hier der Lebesgue'sche Satz nicht anwendbar?

5. Hausaufgabe: Bemerkung 5.13 **Vortrag: 12 Minuten**

Beweisen Sie den 3. Teil von Bemerkung 5.13, d.h. zeigen Sie dass wenn μ σ-endlich ist, so ist f μ-fast-überall eindeutig bestimmt, d.h. aus

$$\int_A f \, d\mu = \int_A g \, d\mu \text{ für alle } A \in \mathcal{F},$$

folgt $f = g$ μ-f.ü. Geben Sie weiterhin ein Beispiel dafür an, dass hier auf die σ-Endlichkeit von μ nicht verzichtet werden kann.