Technische Universität Berlin **SS 2014**
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. M. Scheutzow
Assistentin: M. Wilke Berenguer

Ausgabe: 03.06.2014
Abgabe: 10.06.2014

7. Übungsblatt „Maß- und Integrationstheorie“
Produkträume

Gesamtpunktzahl: 10 Punkte

1. Hausaufgabe: **4 Punkte**
Beweisen Sie, dass

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^2).$$

$\mathcal{L}(E)$ bezeichnet hier die Lebesgue-Mengen auf $E \in \{\mathbb{R}, \mathbb{R}^2\}$.
Hinweis: Benutzen Sie die Regularität des Lebesgue-Maßes

$$\begin{aligned}\forall B \in \mathcal{L}(E): \ \lambda(B) &= \inf\{\lambda(O) \mid B \subset O, O \text{ ist offen}\}\\ &= \sup\{\lambda(A) \mid A \subset B, A \text{ ist abgeschlossen}\}.\end{aligned}$$

2. Hausaufgabe: Lebesgue-σ-Algebra **6 Punkte**
Es seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ zwei messbare Räume.
Beweisen Sie folgende Aussage: Für jedes $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ gilt, dass die Menge der Schnitte $\{C_x \mid x \in X\}$ höchstens die Kardinalität des Kontinuums ($\mathrm{card}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$) hat.
Aus der 3. Hausaufgabe, 7. Übungsblatt, ist bekannt, dass $A_n \in \mathcal{A}, B_n \in \mathcal{B}, n \in \mathbb{N}$ existieren, sodass $C \in \sigma(\{A_n \times B_n \mid n \in \mathbb{N}\})$.
Hinweise:

- Zeigen Sie, dass für $x_1, x_2 \in X$ bereits $C_{x_1} = C_{x_2}$ gilt, falls x_1, x_2 in den selben A_n enthalten sind.
- Betrachten Sie $(\mathbb{1}_{A_n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$.

3. Hausaufgabe: **Vortrag: 8 Minuten**
Sei $X \neq \emptyset$ and $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$. Dann existiert für jedes $C \in \sigma(\mathcal{S})$ eine abzählbare Teilmenge $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, sodass $C \in \sigma(\mathcal{S}_0)$.
Hinweis: Sei $\mathcal{A}$ die Vereinigung aller $\sigma(\mathcal{C})$ über alle abzählbaren $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist.

4. Hausaufgabe: Lebesgue-σ-Algebra **Vortrag: 8 Minuten**
Beweisen Sie, dass

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{L}(\mathbb{R}^2),$$

und dass der Produktraum zweier vollständiger Maßräume nicht mehr notwendigerweise vollständig ist.
$\mathcal{L}(E)$ bezeichnet hier die σ-Algebra der Lebesgue-Mengen auf $E \in \{\mathbb{R}, \mathbb{R}^2\}$.