Technische Universität Berlin **SS 2014**

Fakultät II – Institut für Mathematik

Dozent: Prof. Dr. M. Scheutzow Ausgabe: 10.06.2014

Assistentin: M. Wilke Berenguer Abgabe: 17.06.2014

8. Übungsblatt „Maß- und Integrationstheorie"

Fubini und signierte Maße

Gesamtpunktzahl: 10 Punkte

1. Hausaufgabe: 4 Punkte

Gegeben seien ein σ-endlicher Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ und nichtnegative $\mathcal{F}$-messbare numerische Funktionen f und g. Zeigen Sie:

(a) Für $p \in [1, \infty)$ gilt $\displaystyle\int_\Omega f^p \, d\mu = \int_{[0,\infty)} pt^{p-1} \mu(f > t) \, d\lambda(t)$.

(b) Gilt $\mu(f > t) \leq \mu(g > t)$ für alle $t \geq 0$, so folgt $\displaystyle\int_\Omega f \, d\mu \leq \int_\Omega g \, d\mu$.

2. Hausaufgabe: 6 Punkte

Es sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum. Eine Abbildung $Q\colon \Omega \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ heißt *stochastischer Kern*, falls folgendes gilt:

(i) Für jedes $x \in \Omega$ ist $A \mapsto Q(x, A)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$.

(ii) Für jedes $A \in \mathcal{F}$ ist $x \mapsto Q(x, A)$ eine $(\mathcal{F}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$-messbare Abbildung.

Setze $Q_1 := Q$ und definiere für $n \geq 2$ rekursiv $Q_n(x, A) := \int_\Omega Q_{n-1}(y, A) Q(x, dy)$.
Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist Q_n ist ein stochastischer Kern.

3. Hausaufgabe: Vortrag: 12 Minuten

Es sei

$$f\colon [1, \infty) \times [0, 1] \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto e^{-xy} - 2e^{-2xy}.$$

Untersuchen Sie die iterierten Integrale

$$\int_0^1 \int_1^\infty f(x, y) \, \lambda(dx) \, \lambda(dy) \qquad \text{und} \qquad \int_1^\infty \int_0^1 f(x, y) \, \lambda(dy) \, \lambda(dx)$$

auf Gleichheit. Weshalb ist hier der Satz von Fubini nicht anwendbar?

4. Hausaufgabe: Vortrag: 10 Minuten

Berechnen Sie unter Verwendung des Satzes von Fubini das Lebesgue-Maß der Kreisscheibe

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq r^2\}.$$