Technische Universität Berlin **SS 2014**

Fakultät II – Institut für Mathematik

Dozent: Prof. Dr. M. Scheutzow Ausgabe: 17.06.2014

Assistentin: M. Wilke Berenguer Abgabe: 24.06.2014

9. Übungsblatt „Maß- und Integrationstheorie“

Signierte Maße und Absolutstetigkeit

Gesamtpunktzahl: 10 Punkte

1. Hausaufgabe: BEHAUPTUNG 8.9 **6 Punkte**

Es sei $\mathcal{M}$ der Vektorraum der endlichen signierten Maße auf einem Messraum $(\Omega, \mathfrak{A})$, und es sei $\|\cdot\|$ die Totalvariation auf $\mathcal{M}$. Zeigen Sie:

(a) $\|\cdot\|$ ist eine Norm auf $\mathcal{M}$.

(b) Jede Cauchyfolge bezüglich dieser Norm konvergiert in $\mathcal{M}$.

2. Hausaufgabe: FALTUNG II **4 Punkte**

Seien μ_1 und μ_2 σ-endliche Maße auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$. Die Faltung $\mu_1 * \mu_2$ ist definiert als $\mu_1 * \mu_2 := (\mu_1 \otimes \mu_2) \circ \varphi^{-1}$ mit $\varphi\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, (\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_1 + \omega_2$.

(a) Zeigen Sie, dass für Borel-messbare, Lebesgue-integrierbare $f_1, f_2 \geq 0$ gilt:

$$(f_1\lambda^d) * (f_2\lambda^d) = (f_1 * f_2)\lambda^d.$$

Dabei bezeichnet $f\lambda^d$ das Maß mit Dichte f bezüglich λ^d.

(b) Zeigen Sie, dass die Faltung von Maßen kommutativ ist, d.h. dass $\mu_1 * \mu_2 = \mu_2 * \mu_1$ gilt.

3. Hausaufgabe: FALTUNG I **Vortrag: 12 Minuten**

Seien μ_1 und μ_2 σ-endliche Maße auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$. Die Faltung $\mu_1 * \mu_2$ ist definiert als $\mu_1 * \mu_2 := (\mu_1 \otimes \mu_2) \circ \varphi^{-1}$ mit $\varphi\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, (\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_1 + \omega_2$.
Zeigen Sie: Falls μ_1 oder μ_2 eine Dichte bezüglich des Lebesgue-Maßes besitzt, so gilt dies auch für $\mu_1 * \mu_2$.

4. Hausaufgabe: **Vortrag: 10 Minuten**

Es se μ ein endliches Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Seien ν_1 und ν_2 zwei bezüglich μ absolutstetige Maße. Zeigen Sie, dass für die Variationsnorm $\|\cdot\|$ gilt:

$$\|\nu_1 - \nu_2\| = \|\frac{d\nu_1}{d\mu} - \frac{d\nu_2}{d\mu}\|_{L^1(\mu)}.$$