10. Übungsblatt „Maß- und Integrationstheorie“
Absolutstetigkeit und Singularität von Maßen

Gesamtpunktzahl: 10 Punkte

1. Hausaufgabe: LEBESGUE'SCHE ZERLEGUNG **5 Punkte**
Erweitern Sie den Beweis des Lebesgue'schen Zerlegungssatzes (Theorem 9.10) auf $\sigma-$endliche Maße ν.

2. Hausaufgabe: RELATIVE ENTROPIE I **5 Punkte**
Es seien μ und ν zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Dann heißt

$$H(\nu|\mu) := \begin{cases} \int_\Omega \log \frac{d\nu}{d\mu} d\nu, & \text{falls } \nu \ll \mu, \\ \\ \infty, & \text{sonst;} \end{cases}$$

die *relative Entropie* von ν bezüglich μ (oder auch *Kullback-Leibler Abstand* von ν und μ). Zeigen Sie:

(a) Es gilt $H(\nu|\mu) = \int_\Omega \frac{d\nu}{d\mu} \log \frac{d\nu}{d\mu} d\mu$, falls $\nu \ll \mu$. Folgt in diesem Fall $H(\nu|\mu) < \infty$?

(b) $H(\cdot|\mu)$ ist nichtnegativ auf der Menge $\mathcal{M}^1(\Omega, \mathcal{F})$ der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{F})$ und μ ist die einzige Nullstelle.

(c) Für fixiertes μ ist $H(\cdot|\mu)$ konvex auf $\mathcal{M}^1(\Omega, \mathcal{F})$, das heißt, für $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{M}^1(\Omega, \mathcal{F})$ und $\lambda \in (0,1)$ gilt

$$H(\lambda\nu_1 + (1-\lambda)\nu_2|\mu) \leq \lambda H(\nu_1|\mu) + (1-\lambda)H(\nu_2|\mu).$$

3. Hausaufgabe: RELATIVE ENTROPIE II **Vortrag: 10 Minuten**
Berechnen Sie $H(\cdot|\mu)$ für $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ und $\mu = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$ (s. 2. Hausaufgabe).

4. Hausaufgabe: **Vortrag: 12 Minuten**
Seien μ_1, μ_2 zwei $\sigma-$endliche Maße auf einem Messraum, mit $\mu_1 \ll \mu_2$ und $f := \frac{d\mu_1}{d\mu_2}$.

(a) Zeigen Sie: $\mu_2 \ll \mu_1$ gilt, genau dann, wenn $\mu_2(f = 0) = 0$.

(b) Im Fall von (a) ist $\frac{1}{f}$ eine Version der Radon-Nikodym Dichte $\frac{d\mu_2}{d\mu_1}$.

5. Hausaufgabe: 1. HAUSAUFGABE, 11. ÜBUNGSBLATT **10 Punkte**
Diese Aufgabe muss erst am 08.07.2014 abgegeben werden!
Vervollständigen Sie den Beweis von Behauptung 10.9.