

11. Übungsblatt „Maß- und Integrationstheorie“ *Funktionen von beschränkter Variation und Vitali Überdeckungen*

Gesamtpunktzahl: 10 Punkte

1. Hausaufgabe: BEHAUPTUNG 10.9 **10 Punkte**

Vervollständigen Sie den Beweis von Behauptung 10.9.

2. Hausaufgabe: ZUSATZAUFGABE **5 Punkte**

Beantworten Sie folgende Fragen (mit Begründung):

- (i) Ist das Produkt zweier Funktionen von beschränkter Variation wiederum von beschränkter Variation?
- (ii) Sind Linearkombinationen absolutstetiger Funktionen wieder absolutstetig?
- (iii) Ist das Produkt absolutstetiger Funktionen wieder absolutstetig?

3. Hausaufgabe: **Vortrag: 8 Minuten**

Beweisen Sie folgende Aussage:

Eine Funktion $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann von beschränkter Variation, wenn es eine nichtfallende Funktion $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x, y \in [a, b]$ mit $x < y$ die Ungleichung

$$F(y) - F(x) \leq G(y) - G(x)$$

erfüllt ist.

4. Hausaufgabe: ÜBERDECKUNGSSATZ VON VITALI **Vortrag: 12 Minuten**

Beweisen Sie folgende Aussage:

Zeigen Sie, dass die beliebige Vereinigung abgeschlossener achsenparalleler Würfel mit positiver Kantenlänge im \mathbb{R}^d Lebesgue-messbar ist.