TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 02/03
Fakultät II - Institut für Mathematik
Udo Hertrich-Jeromin
Ulrike Scheerer

8. Übungsblatt Elementargeometrie
(Winkelfelder, Abbildungen)

Ausgabe: 9.12.02 Abgabe: 19.12.02 (vor der Übung)

---

1. Übungsaufgabe.
Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ eine ebene Inzidenzgeometrie, für die alle bereits in der Vorlesung eingeführten Axiome gelten sollen.

Seien $A, B, C \in \mathcal{E}$ drei nicht kollineare Punkte. Als **Dreiecksfläche** $\triangle_{ABC}$ bezeichnet man die Schnittmenge der Winkelfelder $\Omega_A = \angle BAC$ und $\Omega_C = \angle ACB$, also $\triangle_{ABC} := \Omega_A \cap \Omega_C$.

Fertigt eine geeignete Skizze an und begründet, warum $\triangle_{ABC}$ eine konvexe Menge ist. Zeigt auß erdem, dass die Definition von $\triangle_{ABC}$ unabhängig von der Wahl der zwei Winkelfelder ist, d.h. zeigt $\Omega_A \cap \Omega_C = \Omega_A \cap \Omega_B = \Omega_B \cap \Omega_C$, wobei $\Omega_B = \angle ABC$.

1. Hausaufgabe. (*7 Punkte*)
Es seien D und W zwei nichtleere Mengen und $f : D \to W$ eine Abbildung. Zeigt folgende Aussagen für Teilmengen $A_1, A_2 \subset D$ und $B_1, B_2 \subset W$:

a) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

b) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$
Gebt außerdem ein Beispiel einer Funktion f und von Teilmengen A_1, A_2 an, so dass $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$ ist.

c) Die Abbildung f ist injektiv $\Leftrightarrow$ Es existiert eine **Linksinverse**, d.h. eine Abbildung $g : W \to D$, so dass für alle $x \in D$ gilt: $g \circ f(x) = x$.

d) Ist f eine bijektive Abbildung mit der Umkehrabbildung $f^{-1} : W \to D$ und ist $y \in W$, so ist $f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}$.

2. Übungsaufgabe.
Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ eine ebene Inzidenzgeometrie, für die alle bereits in der Vorlesung eingeführten Axiome gelten sollen.

Zeigt folgende Behauptungen:

a) Sei $\sigma : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ eine geradentreue Bijektion. Dann definiert σ auch eine Bijektion $\Sigma : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ auf dem Raum der Geraden $\mathcal{G}$ mittels $\Sigma(g) := \sigma(g)$.

b) Sei umgekehrt eine bijektive Abbildung $\Sigma : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ gegeben, die schnittpunkttreu ist, d.h. zwei Geraden g und h schneiden sich genau dann, wenn sich die Bildgeraden $\Sigma(g)$ und $\Sigma(h)$ schneiden und aus $\langle gh \rangle = \langle kl \rangle$ folgt $\langle \Sigma(g)\Sigma(h) \rangle = \langle \Sigma(l)\Sigma(k) \rangle$. Dann kann man mittels Σ eine bijektive geradentreue Abbildung $\sigma : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ durch folgende Konstruktion definieren: Falls $P = \langle gh \rangle$, so ist $\sigma(P) := \langle \Sigma(g)\Sigma(h) \rangle$.

2. Hausaufgabe. *(3 Punkte)*

Seien $\sigma : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ und $\tau : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ geradentreue Bijektionen. Zeigt folgende Behauptungen:

a) Die Verkettung $\sigma \circ \tau : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ ist geradentreu.

b) Die Umkehrabbildung $\sigma^{-1} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ ist geradentreu.

3. Übungsaufgabe (Zusatz).

Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ eine ebene Inzidenzgeometrie, für die alle bereits in der Vorlesung eingeführten Axiome gelten sollen, insbesondere das Spiegelungsaxiom.

Sei $M \subset \mathcal{E}$ eine nichtleere Menge. Dann heißt eine Gerade g **Symmetrieachse** von M, wenn für die Spiegelung σ_g mit Achse g gilt: $\sigma_g(M) = M$.

Zeigt, dass von zwei zueinander senkrechten Geraden jede die Symmetrieachse der anderen ist.

Hinweis: Verwendet beim Beweis die Winkelfeldtreue von σ_g.

4. Übungsaufgabe (Zusatz).

Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ eine ebene Inzidenzgeometrie, für die alle bereits in der Vorlesung eingeführten Axiome gelten sollen, insbesondere das Spiegelungsaxiom.

Sei $\sigma_g : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ die Achsenspiegelung mit Achse $g \in \mathcal{G}$. Zeigt folgende Eigenschaften von σ_g:

a) Die Umkehrabbildung ist σ_g^{-1} ist wieder eine Achsenspiegelung.

b) σ_g bildet parallele Geraden auf parallele Geraden ab.