**TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN** WS 02/03
**Fakultät II - Institut für Mathematik**
Udo Hertrich-Jeromin
Ulrike Scheerer

# 11. Übungsblatt Elementargeometrie
**(Strahlensätze, Translationen)**

---

Ausgabe: 13.1.03 Abgabe: 23.1.03 (vor der Übung)

---

Der Test findet am Donnerstag, den 13.2.2003, von 12.00 Uhr bis 14.00 Uhr im Raum MA 001 statt.

---

Für alle Aufgaben dieses Übungsblattes sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ eine ebene Inzidenzgeometrie, für die alle bereits in der Vorlesung eingeführten Axiome gelten sollen.

**1. Übungsaufgabe.**
Beweist, dass die Menge der Kongruenzabbildungen von $\mathcal{E}$ auf $\mathcal{E}$ eine Gruppe bildet.

**1. Hausaufgabe.** (*4 Punkte*)
Beweist den **Satz von Pappus** für folgenden Fall:

Seien $g, h \in \mathcal{G}$ zwei verschiedene Geraden. Liegen die Ecken $P_1$ bis $P_6$ eines Sechsecks abwechselnd auf den Geraden $g$ und $h$ und gibt es zwei Paare einander gegenüberliegender paralleler Seiten, so sind auch die Seiten des dritten Paares zueinander parallel.

Hinweis: Fertigt Skizzen an. Verwendet geeignete Sätze aus der Vorlesung für den Beweis.

**2. Übungsaufgabe (Zusatz).**
Sei $\{A, B, C\}$ ein echtes Dreieck und seien $M_a$, $M_b$ und $M_c$ die Mittelpunkte der Seiten $[BC]$, $[AC]$ und $[AB]$. Seien $s_a = \langle AM_a \rangle$, $s_b = \langle BM_b \rangle$ und $s_c = \langle CM_c \rangle$ die Seitenhalbierenden und sei $S$ der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden.

a) Zeigt, dass $TV(A, M_a, S) = TV(B, M_b, S) = TV(C, M_c, S) = 2$ gilt.
Anleitung: Fertigt eine geeignete Skizze an. Betrachte zusätzlich die Gerade $\langle M_a M_b \rangle$ und zeigt zunächst $\langle M_a M_b \rangle || \langle AB \rangle$ und $d(M_a, M_b) = \frac{1}{2} d(A, B)$ mit Hilfe von Strahlensätzen. Zeigt dann (wieder mit Hilfe von Strahlensätzen) die Behauptung.

b) Folgert aus a), dass das Dreieck $\{A, B, C\}$ durch eine Streckung mit Zentrum $S$ und Streckfaktor $k = -\frac{1}{2}$ in das Dreieck $\{M_a, M_b, M_c\}$ überführt wird.

c) Zeigt, dass die Geraden $s_a$, $s_b$ und $s_c$ auch die Seitenhalbierenden im Dreieck $\{M_a, M_b, M_c\}$ sind.

**2. Hausaufgabe.** *(4 Punkte)*
Beweist den **kleinen Satz von Desargues**:

Seien $\{A, B, C\}$ und $\{A', B', C'\}$ zwei Dreiecke, so dass die Geraden $\langle AA' \rangle$, $\langle BB' \rangle$ und $\langle CC' \rangle$ paarweise parallel und verschieden sind. Sind dann zwei Paare entsprechender Seiten parallel, so auch die dritten Seiten.

$$\langle A'C' \rangle || \langle AC \rangle \quad \wedge \quad \langle B'C' \rangle || \langle BC \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle A'B' \rangle || \langle AB \rangle$$

**3. Hausaufgabe.** *(2 Punkte)*
Sei $\sigma : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ eine Streckung und sei $\tau : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ eine Translation. Zeigt, dass aus $g||h$ folgt: $\sigma(g)||\sigma(h)$ und $\tau(g)||\tau(h)$.

**3. Übungsaufgabe (Zusatz).**
Seien $g, h \in \mathcal{G}$ zwei parallele Geraden und sei $k \perp g$ eine senkrechte Gerade. Zeigt die folgenden Behauptungen:

a) Seien $s_g$ und $s_h$ zwei beliebige senkrechte Geraden zu $g$ bzw. $h$. Dann sind diese auch parallel: $s_g||s_h$.
(Hinweis: Zeigt zunächst $s_g \perp h$ und folgert daraus $s_g||s_h$.)
Folgert, dass dann für zwei sich schneidende Geraden $g$ und $h$ auch die Senkrechten $s_g$ und $s_h$ sich schneiden.

b) Sei $\tau : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ die Translation gegeben durch $\tau = \sigma_g \circ \sigma_h$ mit den Achsenspiegelungen $\sigma_g$ bzw. $\sigma_h$ an den Geraden $g$ bzw. $h$. Zeigt, dass dann $k$ eine Fixgerade von $\tau$ ist, d.h. $\tau(k) = k$.

**4. Übungsaufgabe (Zusatz).**
In dieser Aufgabe sollen einige Eigenschaften von Translationen $\tau : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ bewiesen werden. Dazu seien $g, h \in \mathcal{G}$ zwei beliebige parallele Geraden, $\sigma_g$ bzw. $\sigma_h$ bezeichnen die Achsenspiegelungen an $g$ bzw. $h$ und $\tau = \sigma_g \circ \sigma_h$.

a) Seien $P, Q \in \mathcal{E}$ zwei verschiedene Punkte. Bestimmt dann zwei geeignete Geraden $g$ und $h$, so dass $\tau(P) = \sigma_g \circ \sigma_h(P) = Q$.

b) Seien $P, Q \in \mathcal{E}$ zwei beliebige Punkte. Zeigt, dass $\langle P\sigma_h(P) \rangle \perp h$ gilt, und folgert daraus mit dem Hinweis zur 3. Übungsaufgabe a) $\langle P\sigma_h(P) \rangle \perp g$ und schließ lich $\langle P\tau(P) \rangle || \langle Q\tau(Q) \rangle$.

c) Zeigt, dass eine Translation mit Fixpunkten die Identität ist, d.h. zeigt folgende Behauptung: Gibt es einen Punkt $P \in \mathcal{E}$ mit $\tau(P) = P$, so ist $\tau = id$ bzw. $g = h$.