TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 02/03
Fakultät II - Institut für Mathematik
Udo Hertrich-Jeromin
Ulrike Scheerer

12. Übungsblatt Elementargeometrie

(Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen)

Ausgabe: 20.1.03	Abgabe: 30.1.03 (vor der Übung)

Der Test findet am Donnerstag, den 13.2.2003, von 12.00 Uhr bis 14.00 Uhr im Raum MA 001 statt.

Für alle Aufgaben dieses Übungsblattes sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ eine ebene euklidische Geometrie.

1. Hausaufgabe. (*3 Punkte*)
Sei $\{A, B, C\}$ ein echtes Dreieck. Seien w_B die Winkelhalbierende des Winkelfeldes $\Omega_B = \angle ABC$ und s_a die Seitenhalbierende der Seite $[BC]$. Sei $\{S\} = s_a \cap w_B$ ihr Schnittpunkt, $g = \langle CS \rangle$ und $\{T\} = g \cap [AB]$. Bestimmt das Teilverhältnis $TV(A, B, T)$.

Hinweis: Fertigt eine geeignete Skizze an und verwendet den Satz von Ceva.

2. Hausaufgabe. (*2 Punkte*)
Wo steckt der Fehler in dem folgenden Beweis einer (offensichtlich) falschen Aussage?

Rechter-Winkel Satz. In einem Viereck $\{A, B, C, D\}$ mit einem Rechtwinkelfeld $\angle BAD$ und zwei gleich langen gegenüberliegenden Seiten $[AB]$ und $[CD]$ ist auch $\angle ADC$ stets ein Rechtwinkelfeld.

Beweis: Es ist $d(A, B) = d(C, D)$ und $\omega(\angle BAD) = \frac{\pi}{2}$ sowie $\omega(\angle ADC) = \delta$. Sei m die Mittelsenkrechte zu $[AD]$ mit $m \cap [AD] = \{M\}$ sowie m' die Mittelsenkrechte zu $[BC]$ mit $m' \cap [BC] = \{M'\}$. O.B.d.A. gelte nun weiterhin $d(B, C) > d(A, D)$. Dann schneiden sich offensichtlich m und m' in einem Schnittpunkt S, wie die nachstehende Skizze zeigt.
Wegen $S \in m$ gilt $d(S, A) = d(S, D)$. Ebenso folgt $d(S, B) = d(S, C)$ aus $S \in m'$. Da zudem nach Voraussetzung $d(A, B) = d(C, D)$ ist, stimmen die Dreiecke $\{A, B, S\}$ und $\{C, D, S\}$ in allen drei Seitenlängen überein, sind also nach dem Kongruenzsatz (SSS) kongruent. Daraus folgt die Übereinstimmung der entsprechenden Winkelmaß e, d.h. es gilt $\omega(\angle BAS) = \alpha = \omega(\angle CDS)$.
Andererseits ist nun $\{A, D, S\}$ auf Grund von $d(S, A) = d(S, D)$ ein gleichschenkliges Dreieck. Damit sind die Basiswinkelfelder gleich groß, damit gilt $\omega(\angle DAS) = \beta = \omega(\angle ADS)$.
Fassen wir nun unsere Erkenntnisse zusammen, so erhalten wir $\delta = \omega(\angle ADC) = \omega(\angle SDC) - \omega(\angle SDA) = \alpha - \beta = \omega(\angle SAB) - \omega(\angle SAD) = \omega(\angle DAB) = \frac{\pi}{2}$.
Damit ist aber das Winkelfeld $\angle ADC$ ein Rechtwinkelfeld.

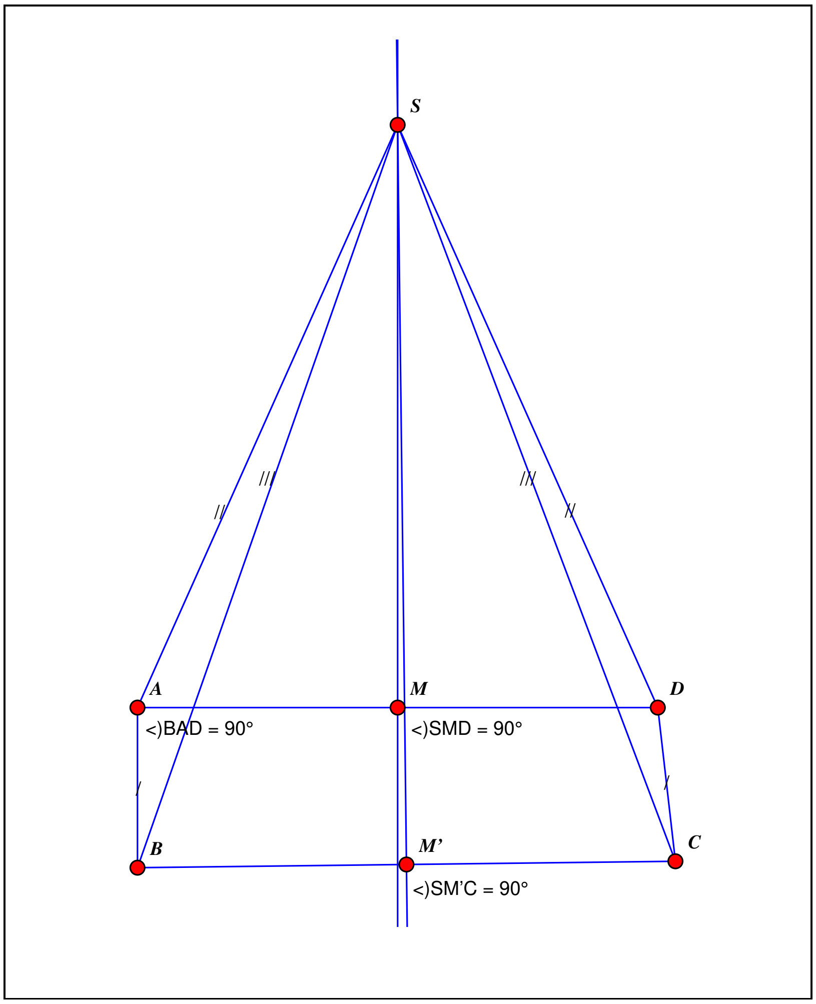

Fig. 3. Skizze zum Beweis des Rechter-Winkel Satzes

3. Hausaufgabe. *(5 Punkte)*

Beweist den **Dreispiegelungssatz** für sich schneidende Geraden:

Seien $g, h, k \in \mathcal{G}$ drei verschiedene Geraden, die sich in einem Punkt $\{Z\} = g \cap h \cap k$ schneiden. Dann gibt es eine Gerade l durch Z, so dass für die Verkettung der Spiegelungen σ_g, σ_h und σ_k gilt: $\sigma_k \circ \sigma_h \circ \sigma_g = \sigma_l$.

Anleitung: Wählt $P \in g \setminus \{Z\}$ beliebig. Sei $P' = \sigma_k \circ \sigma_h(P)$. Begründet, warum $P \neq P'$ ist und warum die Mittelsenkrechte l von $[PP']$ durch Z geht. Zeigt dann, dass die Gerade $\langle PZ \rangle$ eine Fixpunktgerade von $\sigma_l \circ \sigma_k \circ \sigma_h$ sein muss. Damit ist $\sigma_l \circ \sigma_k \circ \sigma_h$ die Identität oder die Achsenspiegelung σ_g an g. Zeigt, dass der erste Fall (Identität) ausgeschlossen ist, und folgert damit die Behauptung.

1. Übungsaufgabe (Zusatz).
Zeigt die folgenden Behauptungen:

a) Zeigt, dass die Drehungen um einen festen Punkt $Z \in \mathcal{E}$ eine Gruppe bilden.
Hinweis: Verwendet die Darstellung von Drehungen mit Hilfe von Achsenspiegelungen und den Dreispiegelungssatz.

b) Sei M eine nichtleere Menge auf der eine Gruppe von Transformationen gegeben ist. Für zwei Teilmengen $A, B \subset M$ definieren wir

$$A \cong B \quad :\Leftrightarrow \quad \text{Es existiert eine Transformation } \phi \text{ mit } \phi(A) = B.$$

Zeigt, dass die Kongruenz $\cong$ eine Äquivalenzrelation definiert. Erläutert dabei insbesondere, welche Eigenschaften der Gruppe von Transformationen dafür verwendet werden.

2. Übungsaufgabe (Zusatz).
Sei $O \in \mathcal{E}$ ein fester Punkt. Sei $P \in \mathcal{E}$ ein beliebiger Punkt mit $P \neq O$ und sei τ_P die Translation mit $\tau_P(O) = P$. Sei α eine beliebige Streckung mit Zentrum O. Sei $\tau_{\alpha(P)}$ die Translation mit $\tau_{\alpha(P)}(O) = \alpha(P)$. Zeigt, dass dann gilt:

$$\alpha \circ \tau_P \circ \alpha^{-1} = \tau_{\alpha(P)}.$$

Anleitung: Begründet zunächst, warum für beliebige Spiegelungen σ_g analog zur 2. Übungsaufgabe des 9. Übungsblattes gilt: $\alpha \circ \sigma_g \circ \alpha^{-1} = \sigma_{\alpha(g)}$. Schreibt dann die Translation τ_P mit Hilfe von Spiegelungen und begründet, warum $\alpha \circ \tau_P \circ \alpha^{-1}$ eine Translation ist. Zeigt nun, dass $\alpha \circ \tau_P \circ \alpha^{-1}(O) = \alpha(P) = \tau_{\alpha(P)}(O)$ gilt und folgert aus dem Identitätsstatz für Translationen die Behauptung.

3. Übungsaufgabe (Zusatz).
Sei $\{A, B, C\}$ ein beliebiges echtes Dreieck und seien H_A, H_B und H_C die Fußpunkte der Höhen im Dreieck. Zeigt, dass die drei Produkte aus den Seitenlängen und den Längen der zu den Seiten senkrechten Höhenabschnitten gleich sind, d.h.

$$d(A, B) \cdot d(C, H_C) = d(A, C) \cdot d(B, H_B) = d(B, C) \cdot d(A, H_A).$$

Hinweis: Verwendet geschickt Verhältnisse von Seiten in ähnlichen Dreiecken.