TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 02/03

Fakultät II - Institut für Mathematik
Udo Hertrich-Jeromin
Ulrike Scheerer

3. Übungsblatt Elementargeometrie

(Ordnungsrelation, Äquivalenzrelation)

Ausgabe: 4.11.02 Abgabe: 14.11.02 (vor der Übung)

Sei $M \neq \emptyset$ ein Menge. Sei $R \subset M \times M$ eine Relation. Statt $(x, y) \in R$ schreiben wir $x \leq y$. Dann ist R eine **lineare Ordnungsrelation** auf M, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(O1) Für je zwei beliebige Elemente $x, y \in M$ gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$.

(O2) Falls für zwei Elemente $x, y \in M$ sowohl $x \leq y$ als auch $y \leq x$ erfüllt ist, so gilt $x = y$.

(O3) Falls für drei Elemente $x, y, z \in M$ die Beziehungen $x \leq y$ und $y \leq z$ erfüllt sind, so gilt auch $x \leq z$.

1. Übungsaufgabe.
Schreibt die Eigenschaft (O1) für eine lineare Ordnungsrelation mit Hilfe von Quantoren. Verneint dann diese Aussage mit Hilfe von Quantoren und formuliert die verneinte Aussage mit Worten.

1. Hausaufgabe. (*5 Punkte*)
Schreibt die Eigenschaften (O2) und (O3) für eine lineare Ordnungsrelation mit Hilfe von Quantoren. Verneint dann diese Aussagen mit Hilfe von Quantoren und formuliert die verneinten Aussagen mit Worten.

2. Hausaufgabe. (*5 Punkte*)
Betrachtet eine ebene Geometrie $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$, in der die Inzidenzaxiome (I) und (II) gelten. Die folgende Aussage kann dann bewiesen werden:

$$(\forall\ P \in \mathcal{E}\ \exists\ g, h \in \mathcal{G}\ , g \neq h\ :\ P \in g \cap h) \ \Rightarrow\ (\forall\ g \in \mathcal{G}\ \exists\ P \in \mathcal{E}\ :\ P \notin g).$$

Formuliert diese Aussage mit Worten.

Findet dann zwei Beweise für diese Behauptung: (a) einen direkten Beweis und (b) einen indirekten Beweis. Gebt dabei jeweils an, was Ihr als gegeben oder wahr annehmt und was zu zeigen ist.

2. Übungsaufgabe (Zusatz).
Auf der Ebene $\mathbb{R}^2$ sei die folgende Relation $R \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ definiert, wobei wir $\vec{a} \sim \vec{b}$ schreiben, wenn $\vec{a} = (a_1, a_2) \in R^2$ in Relation zu $\vec{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ steht:

$$\vec{a} \sim \vec{b} :\Leftrightarrow \; a_1 = b_1 \wedge \exists\, n \in \mathbb{Z} : \; b_2 = 2\pi n + a_2.$$

Zeigt das dies eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^2$ definiert.

Dafür muss gezeigt werden, dass für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^2$ die folgenden Eigenschaften der Relation $\sim$ erfüllt sind:

(A1) (Reflexivität) $\vec{a} \sim \vec{a}$

(A2) (Symmetrie) $\vec{a} \sim \vec{b} \;\Rightarrow\; \vec{b} \sim \vec{a}$

(A3) (Transitivität) $\vec{a} \sim \vec{b} \wedge \vec{b} \sim \vec{c} \;\Rightarrow\; \vec{a} \sim \vec{c}$

3. Übungsaufgabe (Zusatz).
Betrachtet die Äquivalenzrelation aus der vorhergehenden Zusatzaufgabe. Veranschaulicht die Relation und die Menge der Äquivalenzklassen $\mathbb{R}^2/_\sim$.

Nun betrachten wir die Menge der Äquivalenzklassen als Ebene $\mathcal{E} := \mathbb{R}^2/_\sim$. Die Geraden g auf dieser Ebene werden aus den Geraden von $\mathbb{R}^2$ gebildet, indem aus der Geraden $G_{\vec{c},d} = \{\vec{a} \in \mathbb{R}^2 \mid c_1 a_1 + c_2 a_2 = d\}$ mit $\vec{c} \neq \vec{0}$ und $d \in \mathbb{R}$ die Gerade $g_{\vec{c},d} = G_{\vec{c},d}/_\sim = \{[\vec{a}] \mid \vec{a} \in G_{\vec{c},d}\}$ gebildet wird. Veranschaulicht die Geraden auf $\mathcal{E}$ und untersucht, welche der Inzidenzaxiome für die ebene Geometrie $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ erfüllt sind.