TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 02/03
Fakultät II - Institut für Mathematik
Udo Hertrich-Jeromin
Ulrike Scheerer

4. Übungsblatt Elementargeometrie
(Koordinatenfunktion, Konvexität)

Ausgabe: 11.11.02 Abgabe: 21.11.02 (vor der Übung)

Für die Aufgaben auf diesem Übungsblatt sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ eine ebene Inzidenzgeometrie, für die die Inzidenzaxiome (I) bis (III) sowie das Anordnungsaxiom (A) und das Streckenmaßaxiom (M1) (mit einem Streckenmaß $d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}_0^+$) gelten.

1. Hausaufgabe. (*7 Punkte*)
Seien $A, B, C, D \in \mathcal{E}$ mit $A \neq B$ und $C \neq D$. Beweist dann die folgenden Aussagen:

a) $[AB] = [CD] \;\Rightarrow\; (A = C \;\wedge\; B = D) \;\vee\; (A = D \;\wedge\; B = C)$

b) $[AB] \subset [CD] \;\Rightarrow\; d(A, B) \leq d(C, D)$

Gebt in den Beweisen jeweils an, welche Axiome, Sätze oder Annahmen verwendet werden.

2. Hausaufgabe. (*3 Punkte*)
In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass die in der Vorlesung konstruierte Koordinatenfunktion χ eindeutig bestimmt ist.

Dafür seien eine beliebige orientierte Gerade $(g, <_g)$ und ein Punkt $O \in g$ gegeben. Zeigt dann, dass jede Abbildung $\chi^* : g \to \mathbb{R}$, die die folgenden Eigenschaften

(K1) $\chi^*(O) = 0$

(K2) Für alle $P, Q \in g$ gilt $|\chi^*(P) - \chi^*(Q)| = d(P, Q)$

(K3) Für alle $P, Q \in g$ gilt $\chi^*(P) < \chi^*(Q) \;\Leftrightarrow\; P <_g Q$

erfüllt, in allen Punkten von g mit der Funktion χ aus der Vorlesung übereinstimmt.

Definition. Eine Teilmenge $\mathcal{K} \subset \mathcal{E}$ der Ebene $\mathcal{E}$ heiß t **konvex**, falls zu je zwei verschiedenen Punkten $P, Q \in \mathcal{K}$ auch die Strecke $[PQ]$ ganz zur Menge $\mathcal{K}$ gehört, also $[PQ] \subset \mathcal{K}$.

1. Übungsaufgabe (Zusatz).
Wir betrachten als Beispiel das **Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene**. Dabei ist die Ebene $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ durch die obere Halbebene

im $\mathbb{R}^2$ gegeben. Die Geraden sind entweder Halbkreise in $\mathcal{E}$, d.h. $g = \{(x, y) \in \mathcal{E} \mid (x-m)^2 + y^2 = r^2\}$ mit $m \in \mathbb{R}$ und $r \in \mathbb{R}^+$, oder Parallelen zur y-Achse, d.h. $g = \{(x, y) \in \mathcal{E} \mid x = c\}$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Skizziert die Ebene und einige Geraden.

Zeigt dann, dass die Menge $K = \{(x, y) \in \mathcal{E} \mid x^2 + y^2 > 1\}$ konvex ist. (Anleitung: Für zwei Punkte $P, Q \in K$ mit $P = (p_1, p_2)$ und $Q = (q_1, q_2)$ kann man oBdA $p_1 \leq q_1$ annehmen. Betrachtet dann die Fälle $p_1 = q_1$ und $p_1 < q_1$ und zeigt jeweils, dass für alle Punkte $X = (x, y) \in [PQ]$ auf der Verbindungsstrecke $x^2 + y^2 > 1$ gilt. Im zweiten Fall ist es hilfreich, zwischen $m < 0$ und $m \geq 0$ für die Verbindungsstrecke $[PQ]$ zu unterscheiden.)

2. Übungsaufgabe (Zusatz).
Seien $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2 \subset \mathcal{E}$ zwei konvexe Mengen. Beweist, dass dann auch der Durchschnitt $\mathcal{D} = \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2$ eine konvexe Menge ist.