TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 02/03
Fakultät II - Institut für Mathematik
Udo Hertrich-Jeromin
Ulrike Scheerer

5. Übungsblatt Elementargeometrie

(Koordinatenfunktion, Halbebenenaxiom)

Ausgabe: 18.11.02 Abgabe: 28.11.02 (vor der Übung)

1. Übungsaufgabe.
Wir betrachten als ebene Inzidenzgeometrie $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ das **Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene**. Sei $R \in \mathbb{R}^+$. Zu der Geraden $g = \{(x,y) \in \mathcal{E} \mid x^2 + y^2 = R^2\}$ sei folgende Abbildung gegeben

$$X : \mathbb{R} \to g, \quad X(r) = (x(r), y(r)) = \frac{R}{\cosh(r)}(\sinh(r), 1).$$

(Dabei ist $\sinh(z) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z})$ und $\cosh(z) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z})$.)

Die Abbildung $X(r)$ ist die Umkehrabbildung der Koordinatenfunktion auf g; insbesondere kann man folgende Eigenschaften zeigen:

a) X ist eine bijektive Abbildung.

b) Es gibt eine strenge lineare Ordnung $<_g$ auf der Geraden g, so dass gilt: $r < s \;\Leftrightarrow\; X(r) <_g X(s)$.

c) Was ist $X(0)$?

d) Wie kann man mit Hilfe der Abbildung $X(r)$ eine Streckenmaßfunktion auf g definieren?

1. Hausaufgabe. (*4 Punkte*)
Betrachtet als Beispiel einer ebenen Inzidenzgeometrie $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ das **Kleinsche Modell der hyperbolischen Ebene**, in der $\mathcal{E}$ die Punktmenge des Inneren eines Kreises mit Mittelpunkt M ist und die Menge der Geraden $\mathcal{G}$ durch die Menge aller offenen Sehnen des Kreises gegeben ist. Wir nehmen an, dass der Mittelpunkt M des Kreises im Ursprung $(0,0)$ der Ebene $\mathbb{R}^2$ liegt und dass der Radius der Kreisscheibe $R \in \mathbb{R}^+$ beträgt. Wie in der 1. Übungsaufgabe auf dem 2. Übungsblatt sei eine Streckenmaßfunktion $d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}^+$ gegeben durch

$$d(A,B) := \left| \log \left(\frac{|[AU]|}{|[BU]|} : \frac{|[AV]|}{|[BV]|} \right) \right|$$

für $A, B \in \mathcal{E}$. (Dabei bezeichne log den natürlichen Logarithmus zur Basis e.)

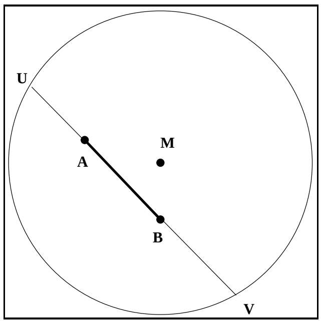

Fig. 2. Kleinsches Modell der hyperbolischen Ebene

Nun betrachten wir Geraden $g_c \in \mathcal{G}$, die sich durch $g_c = \{(x,y) \in \mathcal{E} \mid x = c\}$ mit einem geeigneten $c \in \mathbb{R}$ beschreiben lassen.

a) Skizziert die Ebene $\mathcal{E}$ und einige der Geraden g_c.

b) Betrachtet eine feste Gerade g_c mit $c \in]-R, R[$ fest. Wählt einen geeigneten Punkt $O \in g_c$ und bestimmt dann die Umkehrabbildung der Koordinatenfunktion $\chi : g_c \to \mathbb{R}$ (dies ist also eine Abbildung $X : \mathbb{R} \to g_c$).

Tipp zur Bestimmung der Umkehrabbildung: Bestimmt die euklidische Länge $|[UV]|$ und drückt die Längen $|[XU]|$ und $|[XV]|$ mit Hilfe von $|[UV]|$ und $|[OX]|$ aus. Bestimmt dann aus der Koordinatenfunktion χ die Umkehrabbildung $X : \mathbb{R} \to g_c,\ r \mapsto (c, y(r))$.

2. Hausaufgabe. (*6 Punkte*)

Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ eine ebene Inzidenzgeometrie, für die die Inzidenzaxiome (I) bis (III), das Anordnungsaxiom (A), das Streckenmaßaxiom (M1) und das Halbebenenaxiom (H) gelten.

a) Sei $g \in \mathcal{G}$ eine Gerade und sei $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}$ ein Halbebene zu g. Zeigt, dass dann $\mathcal{H} \cup g$ konvex ist. Unterscheidet dabei für zwei Punkte $P, Q \in \mathcal{H} \cup g$ die Fälle (i) $P, Q \in \mathcal{H}$, (ii) $P, Q \in g$ und (iii) $P \in g \ \wedge \ Q \in \mathcal{H}$ und verwendet das Halbebenenaxiom für den Beweis.

b) Sei $g \in \mathcal{G}$ eine Gerade. Zeigt, dass eine Äquivalenzrelation auf $(\mathcal{E} \setminus g) \times (\mathcal{E} \setminus g)$ definiert ist durch: Für $A, B \in (\mathcal{E} \setminus g)$ gilt

$$A \sim B \ :\Leftrightarrow \ [AB] \cap g = \emptyset.$$

Dabei ist die einpunktige Strecke $[AA]$ definiert durch $[AA] := \{A\}$.

2. Übungsaufgabe (Zusatz).

In dieser Aufgabe wird ein Beispiel betrachtet, das die Unabhängigkeit des Halbebenenaxioms (H) von den vorher in der Vorlesung eingeführten Axiomen zeigt.

Als ebene Inzidenzgeometrie $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ betrachten wir die Ebene $\mathbb{R}^2$, wobei wir den Streifen $[0, 1[\times \mathbb{R}$ "herausgeschnitten" denken, also $\mathcal{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \notin [0, 1[\}$. Die Menge der Geraden sei durch die euklidischen Geraden im $\mathbb{R}^2$ gegeben, wobei der Teil der Geraden im Streifen $[0,1[\times\mathbb{R}$ ignoriert wird also $g = \{(x,y) \in \mathcal{E} \mid ax+by=d\}$ mit $(a,b) \neq \vec{0}$, $d \in \mathbb{R}$.

Skizziert die Ebene und einige Geraden und begründet kurz, warum die Inzidenzaxiome (I) bis (III) und das Anordnungsaxiom (A) gelten.

Das Streckenmaßaxiom (M1) gilt auch: Begründet dafür kurz (!) mit Hilfe von Skizzen, warum durch folgende Abbildung $d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ eine Streckenmaßfunktion auf $\mathcal{E}$ gegeben ist: Für $P = (p_1, p_2)$ und $Q = (q_1, q_2)$ definieren wir

$$d(P,Q) = \begin{cases} |p_2 - q_2| & \text{falls } p_1 = q_1 \\ |p_1 - q_1| & \text{falls } p_1 \neq q_1 \text{ und } p_1 \cdot q_1 > 0 \\ |p_1 - q_1| - 1 & \text{falls } p_1 \neq q_1 \text{ und } p_1 \cdot q_1 < 0 \end{cases}$$

Hinweis: Überlegt, welche Eigenschaften der Streckenmaßfunktion aus der Definition sofort folgen und warum.

Begründet dann, warum jede Gerade $g \in \mathcal{G}$ die Ebene $\mathcal{E}$ in zwei nichtleere konvexe disjunkte Halbebenen $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ zerlegt. Findet außerdem eine Gerade g und zwei Punkte $P \in \mathcal{H}_1$ und $Q \in \mathcal{H}_2$ mit $[PQ] \cap g = \emptyset$.

3. Übungsaufgabe (Zusatz).
Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ eine ebene Inzidenzgeometrie, für die die Inzidenzaxiome (I) bis (III), das Anordnungsaxiom (A), das Streckenmaßaxiom (M1) gelten. Sei $g \in \mathcal{G}$ eine Gerade und $T \notin g$ ein beliebiger Punkt (der nach Axiom (III) existiert).

Wir definieren zwei Teilmengen $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \subset \mathcal{E}$ durch

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &:= \{X \in \mathcal{E} \setminus g \mid [TX] \cap g = \emptyset\}, \\ \mathcal{H}_2 &:= \{X \in \mathcal{E} \setminus g \mid [TX] \cap g \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Veranschaulicht die Konstruktion von $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ und beweist folgende Eigenschaften:

a) $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 = \mathcal{E} \setminus g$ und $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \emptyset$.

b) $\mathcal{H}_1 \neq \emptyset$ und $\mathcal{H}_2 \neq \emptyset$.