TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 03
Fakultät II - Mathematik
Gündel vom Hofe
Körner

Hinweise zum 4. Übungsblatt Funktionentheorie II

H 1. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Man zeige: Jede in G lokal gleichmäßig beschränkte Folge (f_n) von analytischen Funktionen hat eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge. (Satz von Montel)
Hinweis: Ins Skript schauen.

H 2. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Man zeige: Eine in G lokal gleichmäßig beschränkte Folge (f_n) von analytischen Funktionen konvergiert genau dann in G lokal gleichmäßig gegen eine Funktion f, wenn jede in G lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge gegen f konvergiert.
Hinweis: Aufgabe H2 und H4 benutzen.

H 3. Aufgabe (3 Punkte)

Sei $\mathcal{F}$ eine Familie von im Gebiet G definierten Funktionen. Man zeige: $\mathcal{F}$ ist genau dann in G lokal gleichmäßig beschränkt, wenn $\mathcal{F}$ auf jeder kompakten Teilmenge von G gleichmäßig beschränkt ist.

H 4. Aufgabe (3 Punkte)

Beweisen sie die Funktionalgleichung für die Γ-Funktion

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Hinweis: Integraldarstellung der Γ-Funktion, partielle Integration. Die Integraldarstellung der Γ-Funktion gilt nur für $\operatorname{Re} z > 0$. Wieso kann man dennoch auf die Gültigkeit der Funktionalgleichung in ganz $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ schließen?

H 5. Aufgabe (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$B(w,z) := \int_0^{\mathbf{1}} t^{w-1}(1-t)^{z-1}dt \qquad \text{(Eulersche Betafunktion)}$$

Achtung ! obere Integralgrenze ist 1, nicht ∞.

a) für festes w mit $\operatorname{Re} w > 0$ eine im Gebiet $\{z \ : \ \operatorname{Re} z > 0\}$ analytische Funktion ist,
b) für festes z mit $\operatorname{Re} z > 0$ eine im Gebiet $\{w \ : \ \operatorname{Re} w > 0\}$ analytische Funktion ist.
Hinweis: Teile a,b) analog zur Behandlung der Γ-Funktion im Skript S. 9. Beachte, dass $\int_0^1 t^\alpha dt < \infty$ für $\alpha > -1$.
c) Zeigen Sie die Eulersche Identität

$$B(w,z) = \frac{\Gamma(w)\Gamma(z)}{\Gamma(w+z)}.$$

Ansatz: $\Gamma(w)\Gamma(z) = \int_0^\infty \int_0^\infty (t^{w-1}e^{-t})(s^{z-1}e^{-s})ds\ dt$,
Pramatertransformation: $x = s+t,\ y = \frac{s}{s+t}$