TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 03
Fakultät II - Mathematik
Gündel vom Hofe
Körner

Extrablatt zur 6. Übung
Funktionentheorie II

Ü 1. Aufgabe

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $\overline{D_r(z_0)} \subset G$ und $u : G \to \mathbb{R}$ harmonisch in G. Dann gilt

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it})\, dt. \qquad \text{(Mittelwertformel)}$$

Lösung: Sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion mit $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$. Aus der Cauchyschen Integralformel erhalten wir

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta}{\zeta - z_0}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} ire^{it}\, dt$$

Durch Übergang zum Realteil ergibt sich dann

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it})\, dt.$$

Ü 2. Aufgabe

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $\overline{D_R(0)} \subset G$ und $f : G \to \mathbb{C}$ analytisch. Dann gelten

a) $$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_R(0)} \frac{R^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} \cdot \frac{f(\zeta)}{\zeta}\, d\zeta \qquad \text{für } \zeta \in D_{R(0)}.$$

b) $$f(re^{i\phi}) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) \frac{R^2 - r^2}{|Re^{it} - re^{i\phi}|^2}\, dt \qquad \text{für } 0 \leq r < R.$$

Lösung:

a) Für $w \in D_R(0)$ ist die Funktion $\frac{f(z)}{R^2 - \overline{w}z}$ analytisch in G. Nach der Causchyschen Integrapformel gilt daher

$$\frac{f(z)}{R^2 - \overline{w}z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_R(0)} \frac{f(\zeta)}{R^2 - \overline{w}\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta - z} \qquad \text{für alle } z, w \in D_R(0).$$

Setzt man $w = z$ und beachtet noch $R^2 - \overline{z}\zeta = \zeta(\overline{\zeta} - \overline{z})$ ergibt sich dann die zu zeigende **Poissonsche Integralformel** für analytische Funktionen.

b) Setzt man in a) $z = re^{i\phi}$ und die Parametrisierung $\partial D_R(0)$ durch $\zeta = Re^{it}$ von ein, so erhält man

$$f(re^{i\phi}) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) \frac{R^2 - r^2}{|Re^{it} - re^{i\phi}|^2}\, dt \qquad \text{für } 0 \leq r < R.$$

Ü 3. Aufgabe

Sei $f(z) = \frac{1}{z}(z + \frac{1}{z})^n$ wobei n eine positive ganze Zahl sei.

a) Man finde das Residuum von f bei $z = 0$.

b) Welchen Wert hat das Integral $\int_\gamma f dz$ (γ eine stückw. glatte geschlossene Kurve) für ungerades n?

c) Sei γ eine eine stückw. glatte geschlossene Kurve mit $n(\gamma, 0) = 1$ und sei $n = 2m$ ($m \in \mathbb{N}^+$). Zeigen Sie

$$\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i \frac{(2m)!}{(m!)^2}.$$

d) Zeigen Sie $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^{2m} t\, dt = \frac{(2m)!}{2^{2m-1}(m!)^2}\pi.$

Lösung:

a) Nach dem binomischen Satz erhält man folgende Laurententwicklung von f um 0:

$$f(z) = \frac{1}{z}(z + \frac{1}{z})^n = \frac{1}{z} sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} \frac{1}{z^k} = sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-2k-1}.$$

Das Residuum von $f(z)$ bei 0 ist der Koeffizient von z^{-1}, also $\binom{n}{k}$ mit $n = 2k$ falls n gerade ist und 0, falls n ungerade ist.

b) Da $f(z)$ analytisch in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist, ist

$$\int_\gamma f(z) dz = 0 \begin{cases} \text{nach dem Cauchyschen Integralsatz,} & \text{falls } n(\gamma, 0) = 0 \\ \text{nach dem Residuensatz,} & \text{falls } n(\gamma, 0) \neq 0 \end{cases}.$$

c) Wenn $n = 2m$ ist, so folgt mit a) aus dem Residuensatz

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta = \binom{2m}{m} = \frac{(2m)!}{(m!)^2}.$$

d) Wählt man $\gamma(t) = e^{it}$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$, so ergibt sich aus dem Vorigen

$$2\pi i \frac{(2m)!}{(m!)^2} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \left(e^{it} + e^{-it}\right)^n i e^{it}\, dt = i \int_0^{2\pi} (2\cos t)^n\, dt,$$

woraus sich die gesuchte Formel sofort ergibt.

H 4. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $u : G \to \mathbb{R}$ harmonisch in G und nicht konstant. Dann hat u kein lokales Extremum in G.

H 5. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $\overline{D_r(z_0)} \subset G$ und $f : G \to \mathbb{R}$ analytisch in G. Dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \cdot \frac{\operatorname{Re} f(\zeta)}{\zeta} \, d\zeta \quad + \quad i \operatorname{Im} f(0) \qquad \text{(Schwarzsche Integralformel).}$$

Hinweis:

$$\operatorname{Re} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} = \frac{R^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} \quad \text{für } |\zeta| = R \quad \text{(Beweis?)}$$

H 6. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $\overline{D_R(0)} \subset G$ und $u : G \to \mathbb{R}$ harmonisch. Dann gilt die **Poissonsche Integralformel**

$$u(re^{i\phi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{it}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t - \phi) + r^2} \, dt \qquad \text{für } 0 \leq r < R.$$

H 7. Aufgabe (5 Punkte)

Betrachten Sie in Analogie zu Aufgabe Ü3 Funktionen der Form $z^k f(z)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und werten Sie die folgenden Integrale aus:

$$\int_0^{2\pi} \cos^n t \cdot \cos kt \, dt \qquad \text{und} \qquad \int_0^{2\pi} \cos^n t \cdot \sin kt \, dt$$