TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 03
Fakultät II - Mathematik
Gündel vom Hofe
Körner

Extrablatt zur 8. Übung
Funktionentheorie II

Ü 1. Aufgabe

Sei f analytisch im Gebiet G und $\mathcal{C} \subset G$ eine einfach geschlossene, stückweise glatte Kurve.
Für jedes $w \in \mathbb{C}$ ist die Anzahl der w-Stellen von f im Innern von $\mathcal{C}$ (mit Multiplizität gezählt) gleich der Windungszahl $n(f[\mathcal{C}], w)$ von $f[\mathcal{C}]$ um w.

Lösung: Das ist eine Umformulierung des Argumentprinps für analytische Funktionen bzw. von Satz 23.1 im Skript.
Seien z_k die Nullstellen von $f(z)-w$ in G mit Multipliziät gezählt, also die w-Stellen von f. Die Funktion f hat keine Polstellen in G, da sie analytisch ist.
Da $\mathcal{C} : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine einfach geschlossene Kurve ist, ist die Anzahl der w-Stellen von f im Innern von $\mathcal{C}$ (mit Multiplizität gezählt) gerade $\sum_k n(\mathcal{C}, z_k)$.
Mit Satz 23.1 folgt

$$\sum_k n(\mathcal{C}, z_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z) - w}\, dz = \int_a^b \frac{f'(\mathcal{C}(t)) \cdot \dot{\mathcal{C}}(t)}{f(\mathcal{C}(t)) - w}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{f[\mathcal{C}]} \frac{1}{z - w}\, dz = n(f[\mathcal{C}], w).$$

Ü 2. Aufgabe

Man bestimme die Anzahl der Nullstellen von $p(z) = z^3 - 2z^2 + 4$ im ersten Quadranten.

Lösung: Diese Aufgabe demonstriert eine praktische Anwendung des Argumentprinzips

$$\frac{1}{2\pi}(\text{Änderung des Arguments von } f(z) \text{ längs } \mathcal{C}) = \sum_j n(\mathcal{C}, z_j) - \sum_k n(\mathcal{C}, z_k).$$

Dabei sind f analytisch in $G \subseteq \mathbb{C}$, z_j die Nullstellen von f, z_k die Polstellen von f und $\mathcal{C} \subset G$ eine geschlossene, stückweise glatte Kurve, auf der keine Pole oder Nullstellen liegen.

Wir wählen $\mathcal{C}$ als den Rand eines Viertelkreissegments:

$$\mathcal{C} = [0, R] + (Re^{it} \text{ mit } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}) + [iR, 0]$$

mit großem $R > 0$. Da p weder Nullstellen in $R_{\geq 0}$ noch auf der imaginären Achse hat (wieso eigentlich?) können wir das Argumentprinzip anwenden. Wir betrachten die Änderung des Arguments von $p(z)$ längs $\mathcal{C}$.
Im reellen Intervall $[0, R]$ ist $p(z)$ reell, also ist $\arg p(z) = 0$.
Auf dem Viertelkreis Re^{it}, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ haben wir

$$p(Re^{it}) = R^3 e^{3it}\left(1 - \frac{2}{Re^{it}} + \frac{4}{R^3 e^{3it}}\right) = R^3 e^{3it}(1 + \zeta(R))$$

mit $\lim_{R\to\infty} \zeta(R) = 0$.
Für genügend großes R ist also $p(Re^{it}) \approx R^3 e^{3it}$, also ist $\arg p(Re^{it}) \approx 3it$ und läuft von 0 bis $\frac{3\pi}{2}$ wenn t von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ geht.
Bleibt noch $\arg p(z)$ in $[iR, 0]$ auf der imaginären Achse zu betrachten. Für $z = iy$ ist

$$p(iy) = -iy^3 + 2y^2 + 4,$$

und liegt für $R \geq y \geq 0$ im 4. Quadranten. Entsprechend läuft $\arg p(z)$ hier von $\frac{3\pi}{2}$ bis 2π.
Aus dem Argumentprinzip ergibt sich also, dass $p(z)$ genau eine Nullstelle im ersten Quadranten hat.

Ü 3. Aufgabe

a) Ein Polynom $p(z) = a_n z^n + \ldots = a_1 z + a_0$ mit $a_n \neq 0$ hat genau n mit Multiplizität gezählte Nullsstellen in $\mathbb{C}$.

b) Seien $p(z)$ und $q(z)$ zwei Polymome vom Grad n. Wenn $p(z) = q(z)$ an $n+1$ verschiedenen Punkte in $\mathbb{C}$ gilt, so gilt $p(z) = q(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Lösung:

a) Sei $f(z) = a_n z^n$ und $g(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$. Es gibt ein $R_0 > 0$ sodass

$$\left| \frac{a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}{a_n z^n} \right| \leq 1$$

für $|z| \geq R_0$. Auf jeder Kreislinie Re^{it} $(0 \leq t \leq 2\pi)$ mit $R \geq R_0$ gilt also

$$|f(z)| = |a_n z^n| \leq |a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0| = |g(z)|.$$

Nach dem Satz von Rouché hat somit $f(z)+g(z) = p(z)$ innerhalb eines Kreises $|z| = R$ mit $R > R_0$ genausoviele Nullstellen wie $f(z) = a_n z^n$, also n Nulstellen mit Multiplizität gezählt.

b) Seien $p(z)$ und $q(z)$ zwei Polymome vom Grad n und es gebe $n+1$ Punkte $z_1, \ldots, z_{n+1}$ mit $f(z_k) = g(z_k)$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Dann ist $f(z)-g(z)$ ein Polynom vom Grad $r \leq n$ mit $n+1$ Nullstellen. Daher muss $f(z) - g(z) \equiv 0$ sein, denn sonst $f(z) - g(z)$ hätte genau $r \leq n$ Nullstellen.

H 4. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $\lambda > 1$. Man zeige mit Hilfe des Argumentprinzips, dass die Gleichung

$$z + e^{-z} = \lambda$$

genau eine Lösung in der rechten Halbebene $\{z \,:\, \operatorname{Re} z > 0\}$ hat.

Hinweis: Das geht ähnlich wie in Aufgabe Ü 2.

H 5. Aufgabe (5 Punkte)

Sei f analytisch im Gebiet G und $\mathcal{C} \subset G$ eine einfache geschlossene, stückweise glatte Kurve.
Wenn f die Kurve $\mathcal{C}$ bijektiv auf $f[\mathcal{C}]$ abbildet, dann bildet f auch das Innere von $\mathcal{C}$ bijektiv auf das Innere von $f[\mathcal{C}]$ ab. (Satz von Darboux)

Hinweis: Wende Aufgabe Ü1 an.

H 6. Aufgabe (5 Punkte)

Sei f analytisch in einer Umgebung von $\overline{\mathbb{D}}$ und $f(\partial\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Dann hat f in $\mathbb{D}$ genau einen Fixpunkt.

Hinweis: Wende den Satz von Rouché auf $f(z)$ und $g(z) = z$ an.

H 7. Aufgabe (5 Punkte)

Sei (f_n) eine Folge von im Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ analytischen Funktionen, die lokal gleichmäßig gegen die Funktion $f \not\equiv 0$ konvergiert und sei $c \in G$. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) Die Funktion f hat in c eine m-fache Nullstelle.

ii) Es gibt eine Umgebung $V \subset G$ von c, sodass in jeder Kreisscheibe $B \subset V$ um c fast alle Funktionen f_n genau m Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt) haben.

(Satz von Hurwitz)

Hinweis: Für großes n gilt $|f_n(z)| \leq |f(z)| + \epsilon$. Wende den Satz von Rouché an.