TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 03
Fakultät II - Mathematik
Gündel vom Hofe
Körner

Lösung zur 3. Übungsaufgabe von Übungsblatt 1 Funktionentheorie II

Ü 3. Aufgabe

Man zeige: Eine analytische Abbildung, die $\hat{\mathbb{C}}$ bijektiv auf sich selbst abbildet, ist eine Möbiustransformation.

Lösung:

Vorweg ein nützliches Lemma: Sei f im Gebiet G analytisch und $a \in G$. Die Funktion f hat in a genau dann eine einfache Nullstelle, wenn $\frac{1}{f}$ in a einen einfachen Pol hat.

Beweis:

Sei $f(a) = 0$. Dann gibt es eine Umgebung $U \subset G$ von a, in der f keine weitere Nullstelle außer a hat. Nun folgt:

f hat in a eine einfache Nullstelle,

$\Leftrightarrow$ $f(z) = (z - a) \cdot g(z)$, wobei g analytisch und $g(z) \neq 0$ für alle $a \in U$ ist.

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{f}(z) = \dfrac{1}{z-a} \cdot \dfrac{1}{g(z)}$, wobei $\dfrac{1}{g(z)}$ in U keinen Pol hat,

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{f}(z)$ hat einen einfachen Pol in a. qed

Sei nun $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ analytisch und bijektiv.

1. Fall: $f(\infty) = \infty$.

Dann ist f eine ganze Funktion, also $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Die Funktion $g(z) := f(\frac{1}{z})$ hat nach dem obigen Lemma einen einfachen Pol bei $z = 0$, also ist $g(z) = \sum_{n=0}^{1} a_n \left(\frac{1}{z}\right)^n = a_0 + \frac{a_1}{z}$. Also ist $f(z) = a_0 + a_1 z$ und somit eine Möbiustransformation.

2. Fall: $f(\infty) = c \neq \infty$.

Da f bijektiv ist, hat f an genau einer Stelle $a \in \mathbb{C}$ einen Pol, der nach obigem Lemma ein einfacher Pol ist. Also haben wir $f(z) = \frac{a_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Die Funktion $g(z) := f(z) - \frac{a_{-1}}{z-a} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ist eine ganze Funktion.

Es gilt $\lim_{z\to\infty} g(z) = \lim_{z\to\infty} f(z) = c$. Damit ist $|g(z)| < c$ nach dem Maximumsprinzip. Aus dem Satz von Liouville folgt, dass $g(z)$ konstant ist.

Daher ist $f(z) = \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 = \frac{a_0 z + a_{-1} + a a_0}{z-a}$ eine Möbiustransformation.