TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 03
Fakultät II - Mathematik
Gündel vom Hofe Ausgabe: 23.10.2003 in der Übung
Körner Abgabe: 30.102003 in der Übung

1. Übung Funktionentheorie II

www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS03/Funktionentheorie_II

(Die Riemannsche Zahlenkugel)

Ü 1. Aufgabe

Bestimmen Sie die Menge aller Paare von Punkten $(a, b) \in \hat{\mathbb{C}}^2$, die den chordalen Abstand 1 haben.

Ü 2. Aufgabe

Zeigen Sie, dass die stereographische Projektion Kreise (auf der Zahlenkugel) auf Kreise oder Geraden (in der Ebene) abbildet (und umgekehrt).

Ü 3. Aufgabe

Man zeige: Eine analytische Abbildung, die $\hat{\mathbb{C}}$ bijektiv auf sich selbst abbildet, ist eine Möbiustransformation.

H 4. Aufgabe (5 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Urbilder folgender Punktmengen (in der komplexen Ebene) unter der stereographischen Projektion:

i) $M_a := \{at \ : \ t \in \mathbb{R}\}$ mit $a \in \mathbb{C}$ (Gerade durch den Ursprung),

ii) $Q := \{z \ : \ \operatorname{Re} z > 0\} \cap \{z \ : \ \operatorname{Im} z > 0\}$ (erster Quadrant).

b) Man bestimme die Abbildungen der Riemannschen Zahlenkugel auf sich, die unter der stereographischen Projektion der Multiplikation mit e^{it}, der Inversenbildung und dem Übergang zum Konjugierten entsprechen.

H 5. Aufgabe (5 Punkte)

Zeigen Sie:

a) Jede Möbiustransformation lässt sich als Komposition von Drehstreckungen ($z \mapsto az$), Translationen ($z \mapsto z + b$) und Inversionen ($z \mapsto 1/z$) darstellen.

b) Das Bild eines Kreises oder einer Geraden unter einer Möbiustransformation ist ein Kreis oder eine Gerade.

H 6. Aufgabe (10 Punkte)

Zeigen Sie:

a) Die Menge der Möbiustransformationen der Form $T(z) = \dfrac{az + b}{-\bar{b}z + \bar{a}}$ mit $a, b \in \mathbb{C}$ ist bezüglich der Komposition abgeschlossen.

b) Jede Rotation der Riemannschen Zahlenkugel lässt sich als Komposition von Rotationen um die ζ-Achse und von Rotationen um die Achse durch $(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ und $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ darstellen.

c) Jede Rotation um die ζ-Achse und jede Rotationen um die Achse durch $(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ und $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ entspricht einer Möbiustransformation der Form $T(z) = \dfrac{az + b}{-\bar{b}z + \bar{a}}$ mit $a, b \in \mathbb{C}$.

d) Die Möbiustransformationen der Form $T(z) = \dfrac{az + b}{-\bar{b}z + \bar{a}}$ mit $a, b \in \mathbb{C}$ entsprechen den Rotationen der Riemannschen Zahlenkugel.

e) Sei $T(z) = \dfrac{az + b}{-\bar{b}z + \bar{a}}$ mit $a, b \in \mathbb{C}$.

Zeigen Sie, dass für die chordale Metrik $d(z_1, z_2) = d(T(z_1), T(z_2))$ gilt.

Gesamtpunktzahl: 20