TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 03
Fakultät II - Mathematik
Gündel vom Hofe Ausgabe: 8.1.2004 in der Übung
Körner Abgabe: 15.1.2004 in der Übung

10. Übung Funktionentheorie II

www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS03/Funktionentheorie_II

(Riemannscher Abbildungssatz)

Ü 1. Aufgabe

Seien $G_1, G_2 \subsetneqq \mathbb{C}$ zwei Gebiete und seien $a \in G_1$, $b \in G_2$ und $0 \leq \alpha < 2\pi$. Dann gibt es genau eine konforme, bijektive Abbildung $f : G_1 \to G_2$ mit $f(a) = b$ und $\arg f'(a) = \alpha$.

Ü 2. Aufgabe

Beschreiben sie den Fluss einer idealen homogenen Strömung in der komplexen Ebene um ein kreisförmiges Hindernis mit Radius 1.

H 3. Aufgabe (5 Punkte)

a)Sei f eine analytische Funktion, die $G := \{z \ : \ 0 < |z| < 1\}$ auf ein beschränktes Gebiet Ω abbildet. Man zeige, dass f bei $z = 0$ eine hebbare Singularität hat und dass $f(0) \in \partial\Omega$, sofern f bijektiv ist.
b) Man zeige, dass es keine analytische Funktion gibt, die $G := \{z \ : \ 0 < |z| < 1\}$ bijektiv auf den Kreisring $\{z \ : \ r < |z| < R\}$ mit $0 < r < R$ abbildet.

H 4. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $f(z) = u(z) + iv(z)$ ein Fluss im komplexen Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$. Zeigen Sie:
a) Wenn f lokal quellenfrei und lokal rotationsfrei ist, so ist $\bar{f} = u(z) - iv(z)$ analytisch und es existiert ein komplexes Potential F von f, d.h. mit $F'(z) = \bar{f}(z)$.
b) Die Stromlinien von f sind die Höhenlinien von $\operatorname{Im} F$, $\{z \in G \ : \ \operatorname{Im} F(z) = K\}$ $(K \in \mathbb{R})$.

H 5. Aufgabe (5 Punkte)

Bestimmen Sie eine Funktion h, die im ersten Quadranten $\{z \ : \ \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$ harmonisch ist und die Randbedingungen $h(z) = 100$ für $z \in \{i \cdot t \ : \ t > 0\}$ und $h(z) = 0$ für $z \in \{t \ : \ t > 0\}$ erfüllt.
Interpretieren sie h als Temperaturverteilung und skizzieren Sie die Stromlinien und Isothermen des zugehörigen Wärmeflusses.

H 6. Aufgabe (5 Punkte)

Sei f analytisch in $G = \{z \ : \ \operatorname{Re} z > 0\}$, bijektiv mit $\operatorname{Re} f(z) > 0$ für alle $z \in G$ und $f(a) = a$ für ein $a \in \mathbb{R}$. Man zeige, dass $|f'(a)| \leq 1$ ist.

Gesamtpunktzahl: 20