TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 03
Fakultät II - Mathematik
Gündel vom Hofe
Körner

Ausgabe: 15.1.2004 in der Übung
Abgabe: 22.1.2004 in der Übung

11. Übung Funktionentheorie II

www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS03/Funktionentheorie_II

(Spiegelungsprinzipien)

Ü 1. Aufgabe

Sei G ein zur reellen Achse symmetrisches Gebiet (d.h. $G = \{\overline{z} \ : \ z \in G\}$). Es sei $f : \{z \in G \ : \ \operatorname{Im} z \geq 0\} \to \mathbb{C}$ stetig, in $\{z \in G \ : \ \operatorname{Im} z > 0\}$ analytisch und auf $G \cap \mathbb{R}$ reellwertig. Man zeige, dass durch

$$\hat{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{für } \operatorname{Im} z \geq 0 \\ \overline{f}(\overline{z}) & \text{für } \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$

eine in G analytische Funktion definiert wird.(Schwarzsches Spiegelungsprinzip)

Lösung: Es ist leicht zu sehen (vgl. z.B. FT I, Blatt 5, Aufgabe H5), dass $\hat{f}$ in $G \setminus \mathbb{R}$ analytisch und in ganz G stetig ist.
Es bleibt also noch zu zeigen, dass $\hat{f}$ auch auf der reellen Achse analytisch ist.
Zuvor sei ein Lemma aus der Analysis zitiert, das wir später benutzen werden:
Lemma
Die reellwertige (komplexwertige) Funktion h sei auf dem Rechteck $Q = [a,b] \times [c,d]$ stetig. Dann ist die Funktion

$$H(y) := \int_a^b h(x,y)\,dx$$

in $[c,d]$ definiert und stetig.

Sei nun $z_0 = x_0 + iy_0 \in G \cap \mathbb{R}$ und $r > 0$ so klein, dass das Quadrat $Q := \{z \ : \ x_0 - r \leq \operatorname{Re} z \leq x_0 + r, \ -r \leq \operatorname{Im} z \leq r\} \subset G$.

Im Inneren von Q wird durch

$$h(z) := \int_{\partial Q} \frac{\hat{f}(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

(∂Q mit mathematisch positiver Orienterung genommen) eine analytische Funktion definiert (vgl. Skript FT I, Satz 7.2). Wir wollen zeigen, dass $h \equiv \hat{f}$ ist.
Sei zunächst $w \in Q$ mit $\operatorname{Im} w > 0$. Wir zerlegen Q in die drei Rechtecke $R_1 = \{z \in Q \;:\; \epsilon \leq \operatorname{Im} z \leq r\}$, $R_2 = \{z \in Q \;:\; -\epsilon \leq \operatorname{Im} z \leq +\epsilon\}$ und $R_3 = \{z \in Q \;:\; -r \leq \operatorname{Im} z \leq -\epsilon\}$, wobei $0 < \epsilon < \operatorname{Im} w$ sei.
Dann ist

$$\begin{aligned} h(w) &= \int_{\partial Q} \frac{\hat{f}(\zeta)}{\zeta - w}\, d\zeta \\ &= \underbrace{\int_{\partial R_1} \frac{\hat{f}(\zeta)}{\zeta - w}\, d\zeta}_{=\hat{f}(w),\ \text{C.Int.formel}} + \int_{\partial R_2} \frac{\hat{f}(\zeta)}{\zeta - w}\, d\zeta + \underbrace{\int_{\partial R_3} \frac{\hat{f}(\zeta)}{\zeta - w}\, d\zeta}_{=0,\ \text{C.Int.satz}}, \end{aligned}$$

wobei wieder alle Randkurven ($\partial Q, \partial R_i$) in positiver Richtung durchlaufen werden sollen.
Wir müssen noch

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial R_2} \frac{\hat{f}(\zeta)}{\zeta - w}\, d\zeta = 0$$

zeigen. Die vier Seiten des Rechtecks R_2 seien

$$\begin{aligned} S_1(t) &= t - i\epsilon && \text{mit } x_0 - r \leq t \leq x_0 + r, \\ S_2(t) &= x_0 + r + it && \text{mit } -\epsilon \leq t \leq \epsilon, \\ S_3(t) &= t + i\epsilon && \text{mit } x_0 - r \leq t \leq x_0 + r, \\ S_4(t) &= x_0 - r + it && \text{mit } -\epsilon \leq t \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Dann ist $\partial R_2 = S_1 + S_2 - S_3 - S_4$.
Da $\frac{\hat{f}(\zeta)}{\zeta - w}$ für $\zeta \in \partial R_2$ beschränkt ist, folgt

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial S_2} \frac{\hat{f}(\zeta)}{\zeta - w}\, d\zeta = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial S_4} \frac{\hat{f}(\zeta)}{\zeta - w}\, d\zeta = 0$$

Da weiter $\frac{\hat{f}(\zeta)}{\zeta-w}$ in $\overline{R}_2$ stetig ist, ist nach dem Lemma oben

$$I(y) := \int_{x_0-r}^{x_0+r} \frac{\hat{f}(t+iy)}{t+iy-w}\, dt$$

für $y \in [-\epsilon, \epsilon]$ stetig und

$$\begin{aligned} &\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\partial S_1} \frac{\hat{f}(\zeta)}{\zeta-w}\, d\zeta - \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\partial S_3} \frac{\hat{f}(\zeta)}{\zeta-w}\, d\zeta \\ = &\lim_{\epsilon\to 0}\left(I(-\epsilon) - I(\epsilon)\right) = 0 \end{aligned}$$

Damit ist $h(w) = \hat{f}(w)$ für $w \in Q$, $\operatorname{Im} w > 0$ gezeigt. Analog sieht man $h(w) = \hat{f}(w)$ für $w \in Q$, $\operatorname{Im} w < 0$. Aus dem Identitätssatz folgt nun, dass $h(w) = \hat{f}(w)$ in ganz Q gilt und insbesondere $\hat{f}$ auch in dem oben gewählten Punkt $z_0 \in \mathbb{R}$ analytisch ist.

H 2. Aufgabe (5 Punkte)

Sei f eine ganze Funktion, die auf einem Intervall (a, b) auf der reellen Achse reellwertig ist. Man zeige, dass f auf der gesamten reellen Achse reellwertig ist.

H 3. Aufgabe (8 Punkte)

Beweisen Sie folgende Verallgemeinerung des Spiegelungsprinzips:
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, das durch die stückweise glatte, injektive Kurve $\mathcal{C} : \overline{G} \to \mathbb{C}$ in zwei Teile G_1 und G_2 zerschnitten wird (d.h. $G \setminus \mathcal{C}$ hat zwei Zusammenhangskomponenten).
Seien $f_1 : G_1 \cup \mathcal{C} \to \mathbb{C}$ und $f_2 : G_2 \cup \mathcal{C} \to \mathbb{C}$ stetige Funktionen, die in G_1 bzw. G_2 analytisch sind.
Wenn für alle $z \in \mathcal{C}$ gilt $f_1(z) = f_2(z)$, so ist die Funktion

$$f : G \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} f_1(z) & \text{für } z \in G_1 \cup \mathcal{C} \\ f_2(z) & \text{für } z \in G_2 \end{cases}$$

analytisch in ganz G.

H 4. Aufgabe

(7 Punkte)

a) (Spiegelung am Kreis) Sei f analytisch in $\mathbb{D}$ und stetig in $\overline{\mathbb{D}}$. Es sei $|f(z)| = 1$ für alle $z \in \partial\mathbb{D}$. Man zeige, dass f zu einer meromorphen Funktion in ganz $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden kann durch

$$f(z) = \frac{1}{\overline{f(\overline{z})}} \quad \text{für } |z| > 1.$$

b) Man zeige weiter, dass f eine rationale Funktion ist, und dass

$$f(z) = \lambda \frac{z - a_1}{1 - \overline{a}_1 z} \cdot \frac{z - a_2}{1 - \overline{a}_2 z} \cdots \frac{z - a_k}{1 - \overline{a}_k z} \quad \text{mit } a_j \in \mathbb{D} \quad \text{und } |\lambda| = 1$$

ist.

Hinweis: Wähle als a_i die Nullstellen von f; Induktion über die Anzahl der Nullstellen von f in $\mathbb{D}$.

Gesamtpunktzahl: 20