TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 03
Fakultät II - Mathematik
Gündel vom Hofe
Körner

Ausgabe: 22.1.2004 in der Übung
Abgabe: 29.1.2004 in der Übung

12. Übung Funktionentheorie II

www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS03/Funktionentheorie_II

(hyperbolische Geometrie)

Ü 1. Aufgabe

In seinen "Elementen" definiert Euklid unter anderem folgende Begriffe:

- ein Punkt ist was keine Teile hat,
- eine gerade Linie ist eine breitenlose Länge, die Grenze der Linie sind Punkte,
- ...

Den Definitionen lässt Euklid die Axiome folgen, wie z.B.:

- Dinge, die demselben Ding gleich sind, sind einander gleich.
- ...
- Was zur Deckung miteinander gebracht werden kann, ist einander gleich.
- Das Ganze ist größer als sein Teil.

Außerdem fordert er in 5 Postulaten:

1. dass man von jedem Punkt nach jedem Punkt eine gerade Linie ziehen kann,
2. dass man eine begrenzte gerade Linie unbegrenzt verlängern kann,
3. dass man zu jedem Mittelpunkt und Radius den Kreis zeichnen kann,
4. dass alle rechte Winkel einander gleich sind
5. dass, wenn eine gerade Linie zwei gerade Linien so schneidet, dass die innen auf derselben Seite entstehenden Winkel zusammen kleiner als zwei rechte Winkel sind, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche sich auf der Seite treffen, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei rechte Winkel sind.

Geben Sie den Postulaten ein moderne Formulierung und zeigen Sie, dass die Postulate 1 – 4 in der hyperbolischen Ebene gelten, das 5. jedoch nicht.

Ü 2. Aufgabe

a) Sei $a \in \mathbb{D}$ und ϕ eine Möbiustransformation, die $\mathbb{D}$ invariant lässt. Sei z_0 ein Fixpunkt von ϕ. Man zeige, dass dann auch $\frac{1}{\overline{z}_0}$ ein Fixpunkt von ϕ ist.
b) Man klassifiziere die Automorphismen von $\mathbb{D}$ nach Anzahl und Lage ihrer Fixpunkte.

H 3. Aufgabe (6 Punkte)

Zeigen sie, dass in der hyperbolischen Ebene ein hyperbolischer Kreis vom hyperbolischen Radius ρ den hyperbolischen Umfang $\pi \sinh(2\rho)$ hat.

H 4. Aufgabe (8 Punkte)

Eine hyperbolische (h-) Drehung um $z_0 \in \mathbb{D}$ ist ein Automorphismus von $\mathbb{D}$, der z_0 fest läßt. Eine h-Translation ist ein Automorphismus von $\mathbb{D}$, der zwei Fixpunkte ζ_1, ζ_2 auf $\partial\mathbb{D}$ hat.
a) Man zeige: Ist ϕ eine h-Drehung um $z_0 \in \mathbb{D}$, so gilt

$$\frac{\phi(z) - z_0}{1 - \overline{z}_0 \phi(z)} = \kappa \frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z} \ , \quad \text{für } z \in \mathbb{D}, \ \text{mit } |\kappa| = 1 \ .$$

b) Man bestimme die h-Translationen mit Fixpunkten $1, -1$.

H 5. Aufgabe (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass sich jeder Automorphismus von $\mathbb{D}$ ($\phi(z) = e^{i\theta} \dfrac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}$ mit $\theta \in \mathbb{R}$ und $z_0 \in \mathbb{D}$) als Komposition von zwei Spiegelungen an hyperbolischen Geraden darstellen lässt.
(Hinweis: Zuerst z_0 und 0 vertauschen.)

Gesamtpunktzahl: 20