TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 03
Fakultät II - Mathematik
Gündel vom Hofe
Körner

Ausgabe: 29.1.2004 in der Übung
Abgabe: 5.2.2004 in der Übung

13. Übung Funktionentheorie II

www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS03/Funktionentheorie_II

(Koebescher Verzerrungssatz)

Ü 1. Aufgabe

a) Sei $a \in \mathbb{D}$ und ϕ eine Möbiustransformation, die $\mathbb{D}$ invariant lässt. Sei z_0 ein Fixpunkt von ϕ. Man zeige, dass dann auch $\frac{1}{\bar{z}_0}$ ein Fixpunkt von ϕ ist.

b) Man klassifiziere die Automorphismen von $\mathbb{D}$ nach Anzahl und Lage ihrer Fixpunkte.

Ü 2. Aufgabe

Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \setminus \{c\}$ konform und $f(0) = 0$. Beweisen Sie,

dass $\quad |f(z)| \leq \dfrac{4|cz|}{(1-|z|)^2} \quad$ gilt.

H 3. Aufgabe (5 Punkte)

Sei K der Kreis mit Radius $R > 0$ um den Punkt E. Die beiden Sekanten $a = AB$ und $b = AC$ schneiden sich im Punkt A und bilden zusammen mit dem Kreisbogen BC ein (Kreisbogen-)Dreieck ΔABC.
Zeigen Sie:

a) Sind der Kreis K und die Sekante $b = AC$ gegeben, so ist die Gerade a durch die Innenwinkel des Kreisbogendreiecks ΔABC bei A und bei B eindeutig bestimmt.

b) Der Kreis mit Mittelpunkt A, der den Kreis K orthogonal schneidet, ist eindeutig bestimmt.

c) Folgern Sie daraus, dass in der hyperbolischen Ebene ein hyperbolisches Dreieck durch seine Innenwinkel bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist.

H 4. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $f \in \mathbb{S}$. Es gebe $M > 1$ mit $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Man zeige durch Betrachtung von

$$g(z) := Me^{-i\alpha} k(e^{i\alpha} \frac{f(z)}{M}), \quad \text{wobei } k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

die Koebefunktion ist, daß $|a_2| \leq 2(1 - 1/M)$ ist.

H 5. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ schlicht.

$$\left(\frac{1-|z|}{1+|z|}\right)^3 \leq \left|\frac{zf'(z)}{f(z)-f(0)}\right| \leq \left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^3 \qquad \text{für } z \in \mathbb{D}.$$

Hinweis: Man wende den Koebeschen Verzerrungssatz auf $g(z) := \dfrac{f(z)-f(0)}{f'(0)}$ an.

H 6. Aufgabe (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Menge $\{f^{(n)} \ : \ f \in \mathbb{S}\}$ eine lokal gleichmäßig beschränkte, normale Familie ist.
Hinweis: Cauchysche Integralformel

Gesamtpunktzahl: 20