TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 03
Fakultät II - Mathematik
Gündel vom Hofe
Körner

Ausgabe: 30.10.2003 in der Übung
Abgabe: 6.11.2003 in der Übung

2. Übung Funktionentheorie II

www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS03/Funktionentheorie_II

(Windungszahl)

Ü 1. Aufgabe

Sei $\mathcal{C}(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, eine stückweise glatte geschlossene Kurve und $a \in \mathbb{C}$ ein Punkt, der nicht auf $\mathcal{C}$ liegt. Sei $S = \{a + tb \ : \ t \geq 0\}$ ein Strahl, der von a ausgeht. Die Windungszahl $n(\mathcal{C}, a)$ ergibt sich als
$\#\{t \in [0, 2\pi) \ : \ \mathcal{C}(t) \in S$ und $\mathcal{C}$ schneidet S positiv $\}$
$- \#\{t \in [0, 2\pi) \ : \ \mathcal{C}(t) \in S$ und $\mathcal{C}$ schneidet S negativ $\}$.
Warum?

Ü 2. Aufgabe

Sei $f(z) = z^2 - \frac{1}{4}$, $\mathcal{C}_1(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, und $\mathcal{C}_2(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Man berechne die Windungszahlen $n(f(\mathcal{C}_1), 0)$ und $n(f(\mathcal{C}_2), 0)$.

H 3. Aufgabe (5 Punkte)

$$\text{Sei} \quad f(z) = \frac{b_m z^m + \cdots + b_1 z + b_0}{c_n z^n + \cdots c_1 z + c_0} \quad \text{mit } n \geq m \ .$$

Zeigen Sie, dass $f(z)$ eine Partialbruchzerlegung der Form

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{(z - \beta_k)^{\gamma_k}} \quad \text{mit geeigneten} \quad \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{C} \quad \text{und} \quad \gamma_k \in \mathbb{N}^+ \quad \text{besitzt.}$$

H 4. Aufgabe (5 Punkte)

Ein Taxifahrer fährt die folgende Tour:
Start an der Straße des 17. Juni vor dem Mathegebäude, am Ernst-Reuter-Platz in die Otto-Suhr-Allee, über Cauerstraße, Einsteinufer, Marchstraße zurück zum Ernst-Reuter-Platz, weiter in die Hardenbergstraße, durch die

Budapester Straße, Stülerstraße, nach links in die Hofjägeralle zum Großen Stern, den er versehentlich eineinhalbmal umrunden muß. Weiter durch Spreeweg, Paulstraße bis Alt-Moabit. Dann nach links in Alt-Moabit einbiegen, wieder links in die Stromstraße und am Hansaplatz nach links in die Altonaer Straße zurück zum Großen Stern. Dort in die Straße des 17. Juni und zurück zum Ausgangspunkt.
Wie oft umrundet der Taxifahrer bei seiner Tour a) den Ernst-Reuter-Platz, b) den Großen Stern, c) das Mathegebäude?

H 5. Aufgabe (5 Punkte)

Seien γ und σ zwei stückweise glatte, geschlossene Kurven mit demselben Anfangspunkt. Man zeige:
a) $n(\gamma, a) = -n(-\gamma, a)$ für jedes $a \notin \gamma$.
b) $n(\gamma + \sigma, a) = n(\gamma, a) + n(\sigma, a)$ für jedes $a \notin \gamma \cup \sigma$.

H 6. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $\mathcal{C} := \partial D_r(0)$ der Rand der Kreisscheibe mit Radius $r > 0$ um 0 und sei $R(z) = \dfrac{\prod_{k=1}^{n}(z - a_k)}{\prod_{k=1}^{m}(z - b_k)}$ eine rationale Funktion.
Man betrachte die Bildkurve $\tilde{\mathcal{C}} := R(\mathcal{C})$ und zeige:

$$n(\tilde{\mathcal{C}}, 0) = \#\{z_k \in D_r(0) : R(z_k) = 0\} - \#\{z_k \in D_r(0) : R(z_k) = \infty\}.$$

Gesamtpunktzahl: 20