TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 03
Fakultät II - Mathematik
Gündel vom Hofe Ausgabe: 6.11.2003 in der Übung
Körner Abgabe: 13.11.2003 in der Übung

3. Übung Funktionentheorie II

www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS03/Funktionentheorie_II

(Nullhomologie, Satz von Vitali)

Ü 1. Aufgabe

Sei $G := \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ und sei γ die Kurve im nachstehenden Bild.
a) Zeigen Sie, dass γ nullhomolog bezüglich G ist.
b) Überzeugen Sie sich davon, dass γ in G nicht stetig in einen Punkt deformierbar ist.

Ü 2. Aufgabe

Sei $\gamma : [0, 1] \to \hat{\mathbb{C}}$ eine doppelpunktfreie Kurve mit $\gamma(0) = 0$ und $\gamma(1) = \infty$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{C} \setminus \gamma$ einfach zusammenhängend ist.

Ü 3. Aufgabe

Zeigen Sie, dass im Satz von Vitali die Voraussetzung, dass die Folge (f_n) lokal gleichmäßig beschränkt ist, notwendig ist.

H 4. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und sei $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine bijektive stetige Abbildung von $\mathbb{C}$ auf sich. Zeigen Sie, dass $g[G]$ einfach zusammenhängend ist.

H 5. Aufgabe (5 Punkte)

Welche der folgenden Gebiete sind einfach zusammenhängend?

a) $\mathbb{C} \setminus \left(\{x + iy \ : \ x = 0, |y| \leq 1\} \cup \{x + iy \ : \ x > 0, y = \sin \frac{1}{x}\}\right)$

b) $\{x + iy \ : \ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x + iy \ : \ x = \frac{1}{n},\ 0 < y < \frac{1}{2}\}$

c) $\mathbb{D} \setminus \left(\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}^+\}\right)$

H 6. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und sei $1 \in G$. Zeigen Sie, dass es in G eine eindeutige Funktion $\log z$ mit $\log 1 = 0$ gibt.

H 7. Aufgabe (5 Punkte)

Definition: Es sei $\mathcal{F}$ eine Menge im Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ definierter Funktionen. $\mathcal{F}$ heißt *gleichgradig stetig*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle z_1, $z_2 \in G$ und alle $f \in \mathcal{F}$ gilt

$$|z_1 - z_2| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon.$$

$\mathcal{F}$ heißt *lokal gleichgradig stetig* in G, wenn es zu jedem Punkt in G eine Umgebung gibt, in der $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig ist.

Man zeige: Eine im Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ lokal gleichmäßig beschränkte Menge analytischer Funktionen ist in G lokal gleichgradig stetig.

Gesamtpunktzahl: 20