TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 03
Fakultät II - Mathematik
Gündel vom Hofe
Körner

Ausgabe: 23.10.2003 in der Übung
Abgabe: 30.102003 in der Übung

4. Übung Funktionentheorie II

www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS03/Funktionentheorie_II

(Satz von Vitali)

Ü 1. Aufgabe

Sei g eine im Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ analytische Funktion. Es gebe einen Punkt $c \in G$ so, dass die Reihe

$$g(z) + g'(z) + g''(z) + \ldots + g^{(n)}(z) + \ldots$$

in c absolut konvergiert. Man zeige, dass dann g eine ganze Funktion ist und die Reihe in ganz $\mathbb{C}$ lokal gleichmäßig konvergiert.

H 2. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Man zeige: Jede in G lokal gleichmäßig beschränkte Folge (f_n) von analytischen Funktionen hat eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge. (Satz von Montel)

H 3. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Man zeige: Eine in G lokal gleichmäßig beschränkte Folge (f_n) von analytischen Funktionen konvergiert genau dann in G lokal gleichmäßig gegen eine Funktion f, wenn jede in G lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge gegen f konvergiert.

H 4. Aufgabe (3 Punkte)

Sei $\mathcal{F}$ eine Familie von im Gebiet G definierten Funktionen. Man zeige: $\mathcal{F}$ ist genau dann in G lokal gleichmäßig beschränkt, wenn $\mathcal{F}$ auf jeder kompakten Teilmenge von G gleichmäßig beschränkt ist.

H 5. Aufgabe (3 Punkte)

Beweisen sie die Funktionalgleichung für die Γ-Funktion

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

H 6. Aufgabe (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$B(w,z) := \int_0^1 t^{w-1}(1-t)^{z-1}dt \qquad \text{(Eulersche Betafunktion)}$$

a) für festes w mit $\operatorname{Re} w > 0$ eine im Gebiet $\{z \ : \ \operatorname{Re} z > 0\}$ analytische Funktion ist,
b) für festes z mit $\operatorname{Re} z > 0$ eine im Gebiet $\{w \ : \ \operatorname{Re} w > 0\}$ analytische Funktion ist.
c) Zeigen Sie die Eulersche Identität

$$B(w,z) = \frac{\Gamma(w)\Gamma(z)}{\Gamma(w+z)}.$$

Gesamtpunktzahl: 20