TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 03
Fakultät II - Mathematik
Gündel vom Hofe
Körner
Ausgabe: 20.11.2003 in der Übung
Abgabe: 27.11.2003 in der Übung

5. Übung Funktionentheorie II

www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS03/Funktionentheorie_II

(Cauchyscher Integralsatz)

Ü 1. Aufgabe

Welche Werte kann die Funktion $g(z) = 1^z = e^{2k\pi iz}$ annehmen ?
Man diskutiere
a) die Abhängigkeit von k, $\operatorname{Re} z$ und $\operatorname{Im} z$,
b) mögliche Werte für $g(z) = 1^z$ falls $z \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{Q}$, $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Ü 2. Aufgabe

Sei f analytisch in dem einfach zusammenhängenden Gebiet G und sei $C \subset G$ eine geschlossene, stückweise glatte Kurve, die nullhomolog bezüglich G ist. Man zeige:

$$n(C,z)f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\,\zeta$$

H 3. Aufgabe (5 Punkte)

Man zeige, dass die allgemeine Cauchysche Integralformel (Skript Satz 18.3) aus der allgemeinen Version des Cauchyschen Integralsatzes (Skript Satz 18.2) folgt.

H 4. Aufgabe (5 Punkte)

Man führe den Beweis von Satz 19.2 im Skript aus:
Sei f analytisch in dem einfach zusammenhängenden Gebiet G und sei $a \in G$. Dann ist die Funktion

$$g(z) := \int_a^z f(\zeta)\, d\zeta \qquad (z \in G)$$

analytisch in G und es gilt $g'(z) = f(z)$.

H 5. Aufgabe (10 Punkte)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Man zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) G ist einfach zusammenhängend.

b) Für jede analytische Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ und jede geschlossene, stückweise glatte Kurve $C \subset G$ gilt $\displaystyle\int_C f(\zeta)\, d\,\zeta = 0$.

c) Jede geschlossene, stückweise glatte Kurve $C \subset G$ ist nullhomolog in G.

d) Für jede geschlossene, stückweise glatte Kurve $C \subset G$ liegt $\int C := \{z \in \mathbb{C} \,:\, n(C, z) \neq 0\}$ ganz in G.

Gesamtpunktzahl: 20