TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 03
Fakultät II - Mathematik
Gündel vom Hofe
Körner
Ausgabe: 4.12.2003 in der Übung
Abgabe: 11.12.2003 in der Übung

7. Übung Funktionentheorie II

www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS03/Funktionentheorie_II

(Anwendungen des Residuensatzes)

Ü 1. Aufgabe

$$\text{Man berechne} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx.$$

Ü 2. Aufgabe

a) Man berechne die Residuen von $t(z) = \pi \cot \pi z = i\pi \dfrac{1+e^{2\pi i z}}{1-e^{2\pi i z}}$

b) Sei γ der Rand des Quadrats mit den Ecken $(N+\frac{1}{2})(1+i)$, $(N+\frac{1}{2})(-1+i)$,$(N+\frac{1}{2})(-1-i)$ und $(N+\frac{1}{2})(1-i)$ mit $N \in \mathbb{N}$. Mann zeige, dass $t(z)$ auf γ durch eine von N unabhängige Konstante beschränkt ist.

c) Sei $R(z)$ eine rationale Funktion, die bei ∞ eine Nullstelle der Ordnung ≥ 2 hat und die keine Pole in $\mathbb{Z}$ hat.

$$\text{Dann gilt} \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R(n) = -\sum_{z \text{ Pol von } R} \operatorname{res}(R(z)t(z))$$

d) Sei $\omega > 0$. Man berechne $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\omega^2}$.

H 3. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $R(z)$ eine rationale Funktion mit einer Nullstelle der Ordnung ≥ 2 bei ∞, die keine Pole auf der reellen Achse hat. Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\, dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res} R(z)\ .$$

H 4. Aufgabe (5 Punkte)

a) Seien $R(x, y)$ eine rationale Funktion in zwei Variablen und die Kurve γ gegeben durch $z(t) = e^{it}$ für $0 \leq t \leq 2\pi$ (Einheitskreis). Dann gilt

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\phi, \sin\phi)\, d\phi = \int_\gamma -\frac{i}{z}\, R\left(\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})\right)\, dz\ .$$

b) Man berechne das Integral

$$\int_0^\pi \frac{1}{a + \cos t}\, dt \qquad \text{für } a > 1.$$

H 5. Aufgabe (10 Punkte)

a) Man zeige, dass $s(z) = \pi \sin^{-1} \pi z = \dfrac{2\pi i}{e^{i\pi z} - e^{-\pi i z}}$ bei $n \in \mathbb{Z}$ das Residuum $(-1)^n$ hat.

b) Sei γ der Rand des Quadrats mit den Ecken $(N+\frac{1}{2})(1+i)$, $(N+\frac{1}{2})(-1+i)$,$(N+\frac{1}{2})(-1-i)$ und $(N+\frac{1}{2})(1-i)$ mit $N \in \mathbb{N}$. Mann zeige, dass $s(z)$ auf γ durch eine von N unabhängige Konstante beschränkt ist.

c) Man benutze den Residuensatz, um $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ zu berechnen.

Gesamtpunktzahl: 20