TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 03
Fakultät II - Mathematik
Gündel vom Hofe
Körner

Ausgabe: 11.12.2003 in der Übung
Abgabe: 18.12.2003 in der Übung

8. Übung Funktionentheorie II

www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS03/Funktionentheorie_II

(Argumentprinzip, Satz von Rouché)

Ü 1. Aufgabe

Sei f analytisch im Gebiet G und $\mathcal{C} \subset G$ eine einfache geschlossene, stückweise glatte Kurve.
Für jedes $w \in \mathbb{C}$ ist die Anzahl der w-Stellen im Innern von $\mathcal{C}$ (mit Multiplizität gezählt) gleich der Windungszahl $n(f[\mathcal{C}], w)$ von $f[\mathcal{C}]$ um w.

Ü 2. Aufgabe

Man bestimme die Anzahl der Nullstellen von $p(z) = z^3 - 2z^2 + 4$ im ersten Quadranten.

Ü 3. Aufgabe

a) Ein Polynom $p(z) = a_n z^n + \ldots = a_1 z + a_0$ mit $a_n \neq 0$ hat genau n mit Multiplizität gezählte Nullsstellen in $\mathbb{C}$.

b) Seien $p(z)$ und $q(z)$ zwei Polymome vom Grad n. Wenn $p(z) = q(z)$ an $n+1$ verschiedenen Punkte in $\mathbb{C}$ gilt, so gilt $p(z) = q(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

H 4. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $\lambda > 1$. Man zeige mit Hilfe des Argumentprinzips, dass die Gleichung

$$z + e^{-z} = \lambda$$

genau eine Lösung in der rechten Halbebene $\{z \ : \ \mathrm{Re}\, z > 0\}$ hat.

H 5. Aufgabe (5 Punkte)

Sei f analytisch im Gebiet G und $\mathcal{C} \subset G$ eine einfache geschlossene, stückweise glatte Kurve.
Wenn f die Kurve $\mathcal{C}$ bijektiv auf $f[\mathcal{C}]$ abbildet, dann bildet f auch das Innere von $\mathcal{C}$ bijektiv auf das Innere von $f[\mathcal{C}]$ ab. (Satz von Darboux)

H 6. Aufgabe (5 Punkte)

Sei f analytisch in einer Umgebung von $\overline{\mathbb{D}}$ und $f(\partial\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Dann hat f in $\mathbb{D}$ genau einen Fixpunkt.

H 7. Aufgabe (5 Punkte)

Sei (f_n) eine Folge von im Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ analytischen Funktionen, die lokal gleichmäßig gegen die Funktion $f \not\equiv 0$ konvergiert und sei $c \in G$. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) Die Funktion f hat in c eine m-fache Nullstelle.

ii) Es gibt eine Umgebung $V \subset G$ von c, sodass in jeder Kreisscheibe $B \subset V$ um c fast alle Funktionen f_n genau m Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt) haben.

(Satz von Hurwitz)

Gesamtpunktzahl: 20