Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof. Günter M. Ziegler
Axel Werner

Wintersemester 2004/2005
Algorithmische Geometrie

3. Übungsblatt

Abgabe am 18.11.2004

Aufgabe 9: **4 Punkte**

Sei $\vec{e}$ eine Kante in einer doppelt-verketteten Kantenliste.

a) Wir betrachten die folgenden Aussagen:

   i. $\mathit{Origin}(\mathit{Twin}(\vec{e})) = \mathit{Origin}(\mathit{Next}(\vec{e}))$
   ii. $\mathit{Twin}(\mathit{Prev}(\mathit{Twin}(\vec{e}))) = \mathit{Next}(\vec{e})$
   iii. $\mathit{IncidentEdge}(\mathit{Origin}(\mathit{Twin}(\vec{e}))) = \mathit{Next}(\vec{e})$

   Welche der Beziehungen gelten immer? Skizziere für die, welche nicht immer gelten, Gegenbeispiele, sowie Situationen, in denen sie doch wahr sind (falls es solche gibt).

b) Wir betrachten jetzt die folgenden Operationen, die man auf einer doppelt-verketteten Kantenliste ausführen möchte:

   i. Finde zu einer gegebenen Region f die Region, welche von f aus gesehen jenseits der (zu f inzidenten Kante) $\vec{e}$ liegt.
   ii. Durchlaufe alle Regionen, auf die eine Kante $\vec{e}$ „zugeht“.
   iii. Teste, ob zwei Regionen benachbart sind.

   Gib jeweils eine Formel an, mit welcher die entsprechende Operation ausgeführt werden kann, bzw. - falls eine einzige Zeile nicht ausreicht - einen kurzen Algorithmus, der das tut.

Aufgabe 10: **4 Punkte**

Es seien P und Q Polygone mit n bzw. m Ecken. Gib einen Algorithmus an, der den Durchschnitt der beiden von P und Q umschlossenen Flächen berechnet. Er sollte output-sensitiv sein mit Laufzeit $O((n+m+k)\log(n+m))$, wobei k die Anzahl der Schnittpunkte von P und Q ist. Gib ein Beispiel an, in dem die Laufzeit tatsächlich $\Omega(n\,m\log(n+m))$ ist.

Aufgabe 11: **4 Punkte**

Es sei P ein Polygon ohne Löcher und p ein Punkt im Inneren. P sei gegeben als Liste der Eckpunkte, im Gegenuhrzeigersinn geordnet. Zeige, wie man in linearer Zeit das von p aus sichtbare Gebiet in P berechnen kann. (Das sichtbare Gebiet selbst ist natürlich wieder ein Polygon, das durch die Liste seiner Eckpunkte beschrieben werden kann.)

Aufgabe 12: **4 Punkte**

Zeige, dass für jedes Polygon eine Triangulierung (ohne neue Ecken) existiert, sogar wenn es Löcher besitzt. Wie groß ist die Anzahl der Dreiecke in der Triangulierung?

Bitte die Rückseite beachten!

Zusatzaufgabe: Kanten-Wächter ("edge guards") in einem Polygon P mit n Ecken.

Ein Kanten-Wächter ist ein Wächter, der sich auf einer Kante e von P frei bewegen darf. Ein Punkt $y \in P$ wird vom Wächter bewacht, falls es einen Punkt $x \in e$ gibt, so dass x den Punkt y „sehen" kann. Man kann sich auch vorstellen, dass die Kante e selbst Licht ausstrahlt. Dann ist der erhellte Bereich in P das bewachte Gebiet.
TOUSSAINT zeigte, dass $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ Wächter manchmal notwendig sind, um ganz P zu bewachen (siehe Bild 1). Er vermutete, dass $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ ausreichen, außer für kleine n. Ausnahmen sind die beiden Beispiele in Bild 2 und 3, die aber sich aber scheinbar nicht verallgemeinern lassen.
Beweise oder gib ein Gegenbeispiel für TOUSSAINTs Vermutung für $n > 11$.

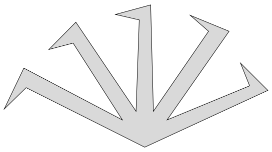

Bild 1

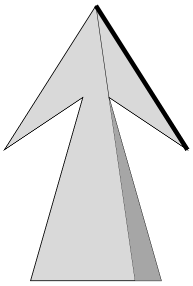

Bild 2: $n = 7$, $B = 2$

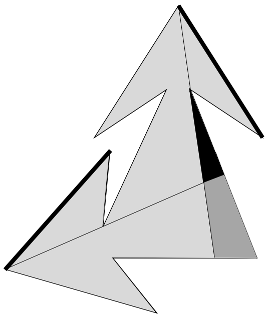

Bild 3: $n = 11$, $B = 3$

(n = Anzahl der Ecken, B = Anzahl der Wächter)