Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof. Günter M. Ziegler
Axel Werner

Wintersemester 2004/2005
Algorithmische Geometrie

11. Übungsblatt

Abgabe am 27.1.2005

Aufgabe 39: **4 Punkte**

a) Zeige, dass je zwei Triangulierungen einer (endlichen) Menge von Punkten in der Ebene durch Kanten-Flips ineinander überführt werden können.

b) Finde eine Menge S von n Punkten in der Ebene, so dass für jede Triangulierung von S immer ein Punkt mit Grad $n-1$ existiert.

Aufgabe 40: **4 Punkte**

Gegeben sei eine Menge S von n Punkten in der Ebene. Ein *euklidischer minimal aufspannender Baum* (EMAB) (oder auf Englisch: Euclidean minimum spanning tree (EMST)) bezüglich S ist ein Baum mit kleinstmöglicher (euklidischer) Länge, der alle Punkte in S verbindet.

a) Zeige, dass die Menge aller Kanten einer Delaunay-Triangulierung von S einen EMAB enthält.

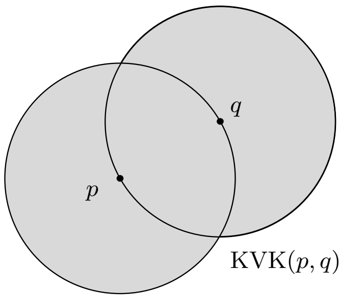
b) Gib einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n \log n)$ an, der einen EMAB bzgl. S berechnet.

(Eine Tatsache, die EMABs interessant macht ist, dass sie eine untere Schranke für die Länge einer TSP-Tour durch die Punkte von S liefern.)

Aufgabe 41: **4 Punkte**

Sei wieder S eine Menge von n Punkten in der Ebene. Ein Punkt p ist ein *nächster Nachbar von q*, falls für alle $r \in S \setminus \{q\}$ gilt: $d(p,q) \le d(r,q)$. Zwei Punkte p und q heißen *gegenseitige nächste Nachbarn*, falls p ein nächster Nachbar von q und q ein nächster Nachbar von p ist.
Der relative Nachbarschaftsgraph von S ist folgendermaßen definiert: die Knoten sind die Punkte aus S; zwei Punkte p und q sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn p und q gegenseitige nächste Nachbarn sind.

a) Zu zwei Punkten p und q bezeichne $\mathrm{KVK}(p,q)$ die Vereinigung der zwei Kreise um p bzw. q mit Radius $d(p,q)$. Zeige, dass die Punkte p und q genau dann gegenseitige nächste Nachbarn sind, wenn $\mathrm{KVK}(p,q)$ keinen anderen Punkt aus S im Inneren enthält.



b) Zeige, dass $\mathcal{DG}(S)$ (der Delaunay-Graph bzgl. S) den relativen Nachbarschaftsgraphen von S enthält (im kombinatorischen Sinne).

c) Gib einen (möglichst schnellen) Algorithmus an, der den relativen Nachbarschaftsgraphen von S berechnet.

Bitte die Rückseite beachten!

Aufgabe 42: **4 Punkte**

Sei $S = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ eine Menge von Punkten in der Ebene. Für jedes $\alpha > 0$ sei $\alpha(S)$ der folgende eingebettete Graph: die Knoten sind Punkte aus S und zwei Punkte $p, q \in S$ sind durch eine geradlinige Kante verbunden, wenn es eine Kreisscheibe $K(p,q)$ mit Radius α gibt, welche p und q auf dem Rand hat und deren Inneres keine Punkte aus S enthält (also $\operatorname{int} K(p,q) \cap S = \emptyset$, $p, q \in \partial K(p,q)$ oder auch $K(p,q) \cap S = \partial K(p,q) \cap S \supset \{p,q\}$). Man nennt $\alpha(S)$ eine α-*Form* (α-shape).

a) Zeige: $\alpha(S)$ ist ein Teilgraph von $\mathcal{DG}(S)$.

b) Finde eine scharfe Schranke α_0 mit der folgenden Eigenschaft: Wenn $\alpha < \alpha_0$, dann ist $\alpha(S)$ der Graph mit n isolierten Knoten.

c) Zeige, dass es ein α_1 gibt, so dass für $\alpha > \alpha_1$ gilt: $\alpha(S) = \partial \operatorname{conv}(S)$.

d) Gib einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n \log n)$ an, der $\alpha(S)$ berechnet.