Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Sekr. MA 8-2 / Frau Schubert

WS 06/07
Ausgabe: 23.01.2007
Abgabe: 30.01.2007

Albrecht Gündel vom Hofe
Jose Mendez

13. Übung zur Analysis II

1. (Präsentationsaufgabe)

   (a) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex. Zeigen Sie:

   Sind $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in G$ beliebig und $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} : [0,1] \longrightarrow G$ zwei stetig differenzierbare Wege in G mit $\boldsymbol{\alpha}(0) = \boldsymbol{\beta}(0) = \mathbf{a}$ und $\boldsymbol{\alpha}(1) = \boldsymbol{\beta}(1) = \mathbf{b}$, so gibt es eine stetig differenzierbare Abbildung

   $$\mathbf{H} : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow G$$

   sodass gilt:

   $$\mathbf{H}(s,0) = \mathbf{a}, \qquad \mathbf{H}(s,1) = \mathbf{b}$$

   und

   $$\mathbf{H}(0,t) = \boldsymbol{\alpha}(t), \qquad \mathbf{H}(1,t) = \boldsymbol{\beta}(t).$$

   (b) Sei G sternförmig bezüglich $\mathbf{x}_0 \in G$ und $\boldsymbol{\alpha} : [0,1] \longrightarrow G$ ein beliebiger geschlossener regulärer Weg. Zeigen Sie: Es gibt es eine stetig differenzierbare Abbildung

   $$\mathbf{H} : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow G$$

   mit $\mathbf{H}(0,t) = \boldsymbol{\alpha}(t)$ und $\mathbf{H}(1,t) = \mathbf{x}_0$ und $\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{H}(s,\cdot) : [0,1] \longrightarrow G$ regulärer geschlossener Weg in G für jedes $s \in [0,1]$.

   Bemerkung: $\mathbf{H}$ heißt in beiden Fällen auch stetig differenzierbare Deformation

2. Sei

   $$A = (a_{i,j}) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$
   $$t \longmapsto A(t),$$

   eine differenzierbare Abbildung und $A_j := (a_{1,j}, \ldots, a_{n,j})^T$ die j-te Spalte von A. Weiter sei

   $$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
   $$t \longmapsto detA(t).$$

Beweisen Sie:

$$f'(t) = \sum_{i=1}^{n} det(A_1(t), \ldots, A_i{}'(t), \ldots, A_n(t)).$$

(5 Punkte)

3. Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert als

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Anhand der Funktion f zeigt man: Man kann auf die stetige Differenzierbarkeit im Beweis des Umkehrsatzes nicht verzichten.

(5 Punkte)

4. Zeigen Sie in Fortsetzung von Aufgabe 4 vom 11. Übungsblatt:

   (a)

   $$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

   unter Verwendung von

   $$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

   (b) Für $x \in \mathbb{R}, x > 0$ gilt:

   $$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

   Man folgere daraus:

   $$\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(5 Punkte)