

Albrecht Gündel vom Hofe  
Jose Mendez

## 14. Übung zur Analysis II

1. Seien  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Funktionen und  $a \in \mathbb{R}$ . Wir sagen:  $f$  und  $g$  sind bis zur Ordnung  $n$  in  $a$  gleich, falls

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - g(a+h)}{h^n} = 0.$$

gilt.

- (a) Ist  $f$  in  $x_0 = a$   $n$ -mal differenzierbar und  $g$  definiert durch

$$g(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i,$$

dann sind  $f$  und  $g$  gleich bis zur Ordnung  $n$  in  $a$ .

Hinweis: Betrachte

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i}{(x-a)^n}$$

- (b) Seien  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$x \mapsto \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad a_i \in \mathbb{R},$$

und  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$x \mapsto \sum_{i=0}^n b_i (x-a)^i, \quad b_i \in \mathbb{R},$$

wobei die Koeffizienten  $b_i \in \mathbb{R}$  durch die iterative Anwendung des Horner-Schemas auf  $f$  an der Stelle  $x = a$  bestimmt werden. Bis zu welcher Ordnung sind  $f$  und  $g$  gleich?

5 Punkte

2. Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $x \mapsto (1-x)^\alpha$  und  $T_n f(x; 0)$  das Taylorpolynom  $n$ -ten Grades von  $f$  im Punkt  $a = 0$ .

- (a) Man bestimme  $T_n f(x; 0)$  und das Restglied  $R_n(x)$

- (b) Man berechne  $T_2 f(x; 0)$  mit  $\alpha = \frac{1}{2}$  und verwende das Ergebnis, um  $\sqrt{2}$  zu approximieren. Wie genau ist die Approximation?
- (c) Sei  $(a_n)$  die reelle Zahlenfolge definiert durch:  $a_0 = 1$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n}$ . Man berechne  $(a_n)$  für  $n = 0, \dots, 4$  und vergleiche das Ergebnis mit dem aus b)
- (d) Man finde das quadratische Polynom, welches mit  $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}$  in  $x_0 = 0$  bis zur Ordnung 2 übereinstimmt.

5 Punkte

3. (Präsentationsaufgabe)

Sei  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  definiert durch

$$\mathbf{x} \mapsto (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_1^2).$$

Man zeige:  $f$  ist in einer Umgebung  $U_\delta(\mathbf{0})$  mit  $0 < \delta$  injektiv und skizzieren Sie das Bild von  $f$ .

5 Punkte

4. (a) Sei  $f : \mathbb{C} - \{\mathbf{0}\} \longrightarrow \mathbb{C}$  definiert durch  $z \mapsto \frac{i}{z}$ .  
Man beschreibe  $f$  als Abbildung von  $\mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$  nach  $\mathbb{R}^2$  und zeige:  $f$  ist ein Diffeomorphismus. Wie lautet die Umkehrabbildung?
- (b) Sei  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  definiert durch

$$\mathbf{x} \mapsto (x_2^3, x_1^3).$$

Man zeige:  $f$  ist ein Homöomorphismus aber kein Diffeomorphismus.

5 Punkte