Technische Universität Berlin **WS 07/08**
Institut für Mathematik
Sekr. MA 7-5 / Frau Michel

Prof. Dr. Jochen Blath
Dipl.-Math. oec. Wiebke Wittmüß

1. Übung zur Finanzmathematik I

Abgabe: Dienstag, den 23.10.2007 (in der Vorlesung oder im Briefkasten vor dem MA 780)

1. Aufgabe (5 Punkte)
Es sei ein Marktmodell mit einer risikolosen Anlage und zwei Aktien gegeben. Der Preisvektor hat die folgende Gestalt: $\pi = (5, 24)$. Zum Zeitpunkt 1 gibt es zwei Szenarien ω_1, ω_2, die jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ auftreten. Es gilt $S(\omega_1) = (4, 16)$, $S(\omega_2) = (10, 32)$ und $r = 0{,}1$. Man überprüfe, ob dieses Modell arbitragefrei ist, falls nicht gebe man eine Strategie an, die zu Arbitrage führt und berechne einen alternativen Preisvektor $\tilde{\pi}$, so dass der Markt arbitragefrei ist.

2. Aufgabe (5 Punkte)
Sei F eine Verteilungsfunktion. Eine Funktion $q\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ heißt *verallgemeinerte Inverse* zu F, falls

$$F(q(t)-) \leq t \leq F(q(t)+) = F(q(t)) \text{ für alle } t \in (0,1).$$

Weiterhin definieren wir

$$q^-(t) = \inf\{x \mid F(x) \geq t\} \text{ und } q^+(t) = \sup\{x \mid F(x) \leq t\}.$$

Die Funktionen q^+ bzw. q^- heißen *obere* bzw. *untere Quantilfunktion zu* F. Man zeige: Eine Funktion $q\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ ist genau dann eine verallgemeinerte Inverse zu F, wenn gilt:

$$q^-(t) \leq q(t) \leq q^+(t) \text{ für alle } t \in (0,1).$$

Insbesondere sind q^- and q^+ verallgemeinerte Inverse zu F.

3. Aufgabe (5 Punkte)
Sei F eine stetige Verteilungsfunktion mit verallgemeinerter Inverse q (vgl. Aufgabe 2). Man zeige: Besitzt die Zufallsvariable X die Verteilungsfunktion F, so ist $U := F(X)$ gleichverteilt auf $(0,1)$, und es gilt $X = q(U)$ $\mathbb{P}$-f.s.

4. Aufgabe (5 Punkte)
Man konstruiere ein Gegenbeispiel zu jeder der folgenden Aussagen.

(i) Sei X eine $\mathbb{P}$-f.s. endliche Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $0 \leq X$. Dann ist $E[X] < \infty$.

(ii) Seien X, Y Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dann gilt: Falls $E[XY] = E[X]E[Y]$, so sind X und Y unabhängig.

(iii) Gilt für Zufallsvariablen X, Y, Z auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, dass $E[XY] = E[XZ]$, so folgt, dass $Y = Z$.