

10. Übung zur Finanzmathematik I

Abgabe: Dienstag, den 07.01.2008 (in der Vorlesung oder im Briefkasten vor dem MA 780)

1. Aufgabe (5 Punkte)

Im Folgenden wird das in der Vorlesung eingeführte Binomialmodell betrachtet. Sei $0 < t < T$. Man bestimme den Preis und eine Absicherungsstrategie für die *Forward-Start-Option*, deren Auszahlungsprofil gegeben ist durch

$$\left(\frac{S_T}{S_t} - K\right)^+.$$

2. Aufgabe (15 Punkte)

Man schreibe in einer höheren Programmiersprache ein Programm, das für frei wählbare Parameter r, a, b, S_0, T den arbitragefreien Preis europäischer Optionen im Binomialmodell ermittelt. Das Programm soll für jede Option der Form $H = h(S_T)$, aber auch für jede Option, die sich als Funktion der gesamten Kursentwicklung (S_0, S_1, \dots, S_T) schreiben lässt, den arbitragefreien Preis errechnen können.

Abzugeben sind ein wohlstrukturiertes und kommentiertes Programmlisting und die Resultate für folgende Beispiele:

a) Sei $r = 0.03$, $b = 0.6$, $a = -0.4$, $T = 20$ und $S_0 = 100$. Bewerte folgende Optionen:

(i) *Europäischer Call* $C = (S_T - K)^+$ mit Basispreis $K = 130$.

(ii) *Europäischer Put* $C = (K - S_T)^+$ mit Basispreis $K = 130$.

(iii) *Bull-Spread* $C = (S_T - K_d)^+ - (S_T - K_u)^+$ mit unterem Ausübungskurs $K_d = 120$ und oberem Ausübungskurs $K_u = 160$.

(iv) *Forward-Start-Option* $C = \left(\frac{S_T}{S_t} - K\right)^+$ mit $t = 5$ und Ausübungskurs $K = 0.75$.

(v) *Lookback-Put* $C = \max_{k=0, \dots, T} S_k - S_T$.

(vi) *Average-Call* $C = \left(\frac{1}{T+1} \sum_{k=0}^T S_k - K\right)^+$ mit Strike $K = 130$.

(vii) *Down-and-Out-Call* $C = (S_T - K)^+ I_{\{\min_{k=0, \dots, T} S_k \geq B\}}$ mit Ausübungskurs $K = 120$ und Knock-Out-Schranke $B = 60$

(viii) *Digital Option* $C = 50 I_{\{S_T > B\}}$ mit Barrier $B = 110$.

- b) Betrachte für r, a, b, S_0 und T wie in a) den arbitragefreien Preis einer europäischen Call-Option $C = (S_T - K)^+$ als Funktion des Basispreises K und plote den Graphen dieser Funktion. Wie sieht der Graph für $T = 1$ aus?
- c) Man erweitere das Programm so, dass es für den europäischen Call zu einem gegebenem Preis den entsprechenden Strike näherungsweise bestimmen kann. Als Beispiele berechne man für r, a, b, S_0 und T wie in a) den Strike zu den Preisen 70, 80 und 90. (Der Strike soll dabei mit einer Genauigkeit von 1 bestimmt werden.)