Technische Universität Berlin **WS 07/08**
Institut für Mathematik
Sekr. MA 7-5 / Frau Michel

Prof. Dr. Jochen Blath
Dipl.-Math. oec. Wiebke Wittmüß

11. Übung zur Finanzmathematik I

Abgabe: Dienstag, den 15.01.2008 (in der Vorlesung oder im Briefkasten vor dem MA 780)

1. Aufgabe (5 Punkte)

Wir betrachten die Folge von Binomialmodellen aus dem Vorlesungsbeispiel, das heißt $r_N = rT/N$ und $a_N = -\sigma\sqrt{(T/N)}$, $b_N = \sigma\sqrt{(T/N)}$. Diese Folge konvergiert bekanntlich gegen das Black-Scholes-Modell. (Insbesondere ist also der Preis einer Call-Option bekannt.) Es seien

$$h^{BS}(x) = (x - K_d)^+ - (x - K_u)^+ \text{ und } h^D(x) = CI_{\{x>B\}}$$

die Auszahlungsfunktionen der Bull-Spread bzw. Digital-Option (mit $0 < K_d < K_u, C, B > 0$).

a) Man bestimme die Preise der Optionen im N-ten Binomialmodell.

b) Man berechne die Grenzwerte dieser Preise für $N \to \infty$.

c) Wozu kann man solche Optionen benutzen?

2. Aufgabe (5 Punkte)

(i) Man leite eine explizite Formel für den Preis einer "up-and-out" Call-Option

$$H^{call}_{u\&o} = (X_T - K)^+ I_{\{\max_{0\le t\le T} X_t < B\}}, \qquad K < B$$

her.

(ii) Man leite eine explizite Formel für den Preis einer "down-and-in" Put-Option

$$H^{put}_{d\&i} = (K - X_T)^+ I_{\{\min_{0\le t\le T} X_t \le B\}}, \qquad B < X_0,$$

im Binomialmodell mit $(1 + a)(1 + b) = 1$ her. Man berechne damit den Preis der Option für die Parameterwerte

$$T = 3,\ S^1_0 = 1,\ a = -0.1,\ r = 0.05,\ B = 0.9 \text{ und } K = 0.9.$$

3. Aufgabe (5 Punkte)

Das Auszahlungsprofil einer Paylater Call-Option ist wie folgt definiert

$$H = (S_T - (K + C))I_{\{S_T\ge K\}},$$

wobei C so bestimmt wird, dass der Preis der Option zum Zeitpunkt 0 gleich 0 ist. Man bestimme den Preis der Option im Black-Scholes-Modell zu einem beliebigen Zeitpunkt $t < T$.

4. Aufgabe (5 Punkte)

Wir betrachten ein Auszahlungsprofil mit Fälligkeit in $T_0 < T$, gegeben durch eine $\mathcal{F}_{T_0}$-messbare Zufallsvariable $C_0 \ge 0$. Dann gibt es zwei Möglichkeiten, die arbitragefreien Preise für C_0 zu bestimmen. Eine Möglichkeit besteht darin, die bekannte Resultate auf den diskontierten claim

$$H_0 \colon = \frac{C_0}{S^0_{T_0}}$$

im Marktmodell mit eingeschränktem Zeithorizont T_0 anzuwenden. Ein alternativer Ansatz ist es, die Auszahlung C_0 im Zeitpunkt T_0 in den Numéraire S^0 zu investieren. Dadurch erhält man im Zeitpunkt T den contingent claim

$$C \colon = C_0 \frac{S^0_T}{S^0_{T_0}},$$

auf den man dann die Resultate für das Marktmodell mit Zeithorizont T anwenden kann.

Man zeige, dass beide Wege zu derselben Menge der arbitragefreien Preise für C_0 führen.