Technische Universität Berlin **WS 07/08**
Institut für Mathematik
Sekr. MA 7-5 / Frau Michel

Prof. Dr. Jochen Blath
Dipl.-Math. oec. Wiebke Wittmüß

12. Übung zur Finanzmathematik I

Abgabe: Dienstag, den 22.01.2008 (in der Vorlesung oder im Briefkasten vor dem MA 780)

1. Aufgabe (5 Punkte)

Seien $X, X_1, X_2, \ldots, Y_1, Y_2, \ldots$ Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und y eine reelle Konstante. Man zeige:

a) $Y_n \to y$ stochastisch genau dann, wenn $Y_n \to y$ in Verteilung.

b) Es gilt der *Satz von Slutzky*: Gilt $X_n \to X$ in Verteilung und $Y_n \to y$ in Verteilung, so gilt auch $(X_n, Y_n) \to (X, y)$ in Verteilung.

c) Unter den Vorraussetzungen aus b) gilt auch

$$X_n + Y_n \to X + y \text{ in Verteilung}$$

$$X_n Y_n \to Xy \text{ in Verteilung.}$$

Hinweis: Zum Beweis von b) benutze man die folgende Charakterisierung der Verteilungskonvergenz von $Z_n \to Z$ für Zufallsvariablen Z_n, Z mit Werten in einem separablen metrischen Raum (S, d):

$$E[f(Z_n)] \to E[f(Z)] \text{ für alle beschränkten und } \textit{gleichmäßig} \text{ stetigen } f : S \to \mathbb{R}.$$

2. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $v(x,t) = x\Phi(d_+(x,t)) - Ke^{-rt}\Phi(d_-(x,t))$ der Black-Scholes-Preis einer europäischen Call-Option mit Strike K und Maturität t. Man beweise die folgenden Formeln für die "Greeks".

$$\Delta(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} v(x,t) = \Phi(d_+(x,t)).$$

$$\Gamma(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x,t) = \varphi(d_+(x,t)) \frac{1}{x\sigma\sqrt{t}} \text{ mit } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

$$\Theta(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} v(x,t) = \frac{x\sigma}{2\sqrt{t}} \varphi(d_+(x,t)) + Kre^{-rt}\Phi(d_-(x,t)).$$

Man zeige

$$rv(x,t) = rx\Delta(x,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \Gamma(x,t) - \Theta(x,t)$$

und folgere, dass v die folgende partielle Differentialgleichung löst, die auch *Black-Scholes-Gleichung* genannt wird,

$$rv = rx\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial t}.$$

3. Aufgabe (10 Punkte)

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf das Black-Scholes-Modell.

(i) Als Parameter seien $S_0 = 43$, $r = 0.0332$, $\sigma = 0.3$ und $T = 1.5$ gegeben. Man berechne mit Hilfe der Monte-Carlo-Integration (1000, 5000 und 10000 Iterationen) den Preis einer Call-Option auf S mit Strike $K = 44$. Anschließend vergleiche man die Ergebnisse mit dem exakten Wert, der sich aus der Black-Scholes-Formel ergibt.

(ii) Jetzt wollen wir uns mit dem *volatility smile* beschäftigen. Dazu schreibe man ein Programm, dass zu gegebenem Call-Preis die implizite Volatilität im Black-Scholes-Modell berechnet (alle anderen Parameter sollten Parameter des Programms sein). Mit Hilfe des Programmes erstelle man einen Plot, der für Call-Optionen auf *adidas*-Aktien die Volatilität in Abhängigkeit vom Strike zeigt. Der Plot sollte auf mindestens 5 Werten basieren, wir nehmen $r = 0.0332$ an, die Laufzeit aller Optionen sollte natürlich gleich sein (mindestens ein Jahr).

Abzugeben sind ein Ausdruck der Programme, bei (i) die Ergebnisse und bei (ii) der Plot sowie die verwendeten Call-Preise unter Angabe der Quelle.