Technische Universität Berlin **WS 07/08**
Institut für Mathematik
Sekr. MA 7-5 / Frau Michel

Prof. Dr. Jochen Blath
Dipl.-Math. oec. Wiebke Wittmüß

13. Übung zur Finanzmathematik I

Abgabe: Dienstag, den 29.01.2008 (in der Vorlesung oder im Briefkasten vor dem MA 780)

1. Aufgabe (5 Punkte)

Es sei H eine diskontierte amerikanische Option und U die zugehörige Snell-Einhüllende. Weiterhin ist $\tau^{(t)}_{min}$ die kleinste optimale Stoppzeit nach t, d.h.

$$\tau^{(t)}_{min} = \inf\{n \geq t \,|\, U_n = H_n\}.$$

Man zeige, dass für $t = 0, \dots, T-1$

$$\tau^{(t)}_{min} = tI_{\left\{H_t \geq \mathbb{E}[H_{\tau^{(t+1)}_{min}} \,|\, \mathcal{F}_t]\right\}} + \tau^{(t+1)}_{min} I_{\left\{H_t < \mathbb{E}[H_{\tau^{(t+1)}_{min}} \,|\, \mathcal{F}_t]\right\}}$$

gilt.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\{0,\dots,T\}}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum, (Y_t) ein stochastischer Prozess mit $Y_t \in \mathcal{L}^1$ für alle $t \in \{0, \dots, T\}$ und U die Snell-Einhüllende von Y mit Doob-Zerlegung $U_t = M_t - A_t$. Ferner betrachten wir die zufälligen Zeiten

$$\tau_{\min}\colon \Omega \to \{0, \dots, T\},\ \omega \mapsto \min\{t \in \{0, \dots, T\} \,|\, U_t(\omega) = Y_t(\omega)\} \text{ und}$$

$$\tau_{\max}\colon \Omega \to \{0, \dots, T\}, \omega \mapsto \inf\{t \in \{0, \dots, T\} \,|\, \mathbb{E}[\,U_{t+1} - U_t \,|\, \mathcal{F}_t\,](\omega) \neq 0\} \wedge T.$$

Dies ist die kleinste beziehungsweise die größte Stoppzeit, die den Erwartungswert von Y_t unter $\mathbb{P}$ maximiert. Man zeige

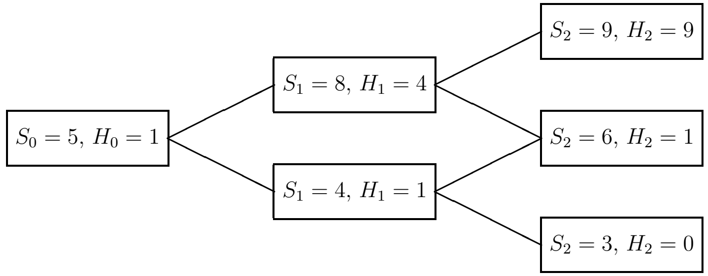
(i) $\tau_{\min}$ und $\tau_{\max}$ sind Stoppzeiten.

(ii) $\tau_{\max} = \inf\{t \in \{0, \dots, T-1\} \,|\, A_{t+1} \neq 0\} \wedge T$ $\mathbb{P}$-f.s.

(iii) Für jede $\{0, \dots, T\}$-wertige Stoppzeit τ gilt $A^\tau_t = 0$ $\mathbb{P}$-f.s. genau dann, wenn $\tau \leq \tau_{\max}$.

3. Aufgabe (5 Punkte)

Gegeben sei ein Modell mit einer Aktie und Zinssatz $r = 0$. Der Kurs der Aktie und die Auszahlung einer amerikanischen Option seien wie folgt.



Der Käufer der Option hält alle vier Ausgänge für gleich wahrscheinlich.

(i) Man bestimme den optimalen Ausübungszeitpunkt für den Käufer, falls er den erwarteten Gewinn maximieren will.

(ii) Welches ist der optimale Ausübungszeitpunkt, falls der Käufer nicht seinen erwarteten Gewinn maximieren will, sondern diesen zunächst mit einer *Nutzenfunktion* $u(x) = \sqrt{x}$ wichtet?

4. Aufgabe (5 Punkte)

In einer Quizshow erhält ein Kandidat für jede richtige Antwort auf eine Quizfrage einen Euro. Anschließend kann er entscheiden, ob er aufhört, und damit den gesamten gewonnenen Betrag behält, oder ob er sich eine weitere Frage geben lässt. Bei der ersten falschen Antwort geht der angesammelte Gewinn verloren und das Quiz wird gestoppt. Es gibt höchstens N Fragen. Unter der Annahme, dass die Fragen unabhängig voneinander richtig oder falsch beantwortet werden, und zwar mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$, gebe man eine Stoppzeit an, die den erwarteten Gewinn des Kandidaten maximiert.