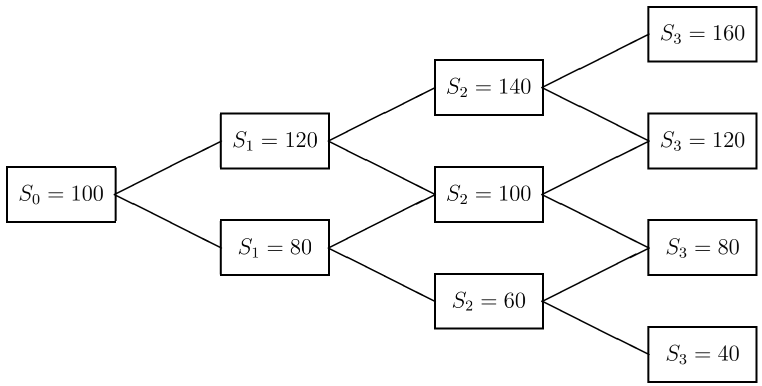
Technische Universität Berlin **WS 07/08**
Institut für Mathematik
Sekr. MA 7-5 / Frau Michel

Prof. Dr. Jochen Blath
Dipl.-Math. oec. Wiebke Wittmüß

14. Übung zur Finanzmathematik I

Abgabe: Dienstag, den 05.02.2008 (in der Vorlesung oder im Briefkasten vor dem MA 780)

1. Aufgabe (5 Punkte)
Gegeben sei ein Modell mit einer Aktie und Zinssatz $r = 0$. Der Kurs der Aktie (ohne Dividendenzahlung) verlaufe wie unten gegeben. Die Aktie zahle zur Zeit 2 eine Dividende von 5% ihres Wertes. Wie sieht der Aktienkurs direkt nach der Dividendenzahlung aus? Was ist der Preis einer amerikanischen Call-Option mit Ausübungskurs 100 und Maturität 3? Wird diese Option vorzeitig ausgeübt?



2. Aufgabe (5 Punkte)
Wir betrachten das folgende 2-Perioden-Marktmodell: Es sei $S^0 = 1$, $S_0 = 3$, $S(\omega_1, \omega_2) = 2$, $S_1(\omega_3, \omega_4, \omega_5) = 4$, $S_2(\omega_1) = 1$, $S_2(\omega_2) = 2$, $S_2(\omega_3) = 3$, $S_2(\omega_4) = 4$, $S_2(\omega_5) = 5$. Das Marktmaß ist gegeben durch $\mathbb{P}[\omega_i] = 1/5$ für $i = 1, \dots, 5$. In diesem Marktmodell betrachten wir die diskontierte amerikanische Call-Option $H_t = (S_t - 3)^+$.

(i) Man zeige, dass

$$\mathbb{P}^*[\omega_i] = \begin{cases} 1/4, & \text{falls } i = 1 \\ 1/4, & \text{falls } i = 2 \\ 1/10, & \text{falls } i = 3 \\ 1/10, & \text{falls } i = 4 \\ 3/10, & \text{falls } i = 5 \end{cases}$$

ein äquivalentes Marktmaß ist und berechne die diesbezügliche Snell-Einhüllende $U^{\mathbb{P}^*}$.

(ii) Man berechne die minimale und die maximale optimierende Stoppzeit für den Käufer.

(iii) Man zeige, dass $U_t^{\mathbb{P}^*}$ für $t < 2$ nicht das minimale Investitionskapital für den Verkäufer ist, um die Option von t bis 2 abzusichern. Man begründe, warum das kein Widerspruch zu den Resultaten der Vorlesung ist.

Es seien Q_1 und Q_2 äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße und $\sigma \in \mathcal{T}$. Dann heißt das Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{Q}$ definiert durch

$$\tilde{Q}[A] = \mathbb{E}_{Q_1}\big[\, Q_2[\, A \,|\, \mathcal{F}_\sigma \,] \,\big], \qquad A \in \mathcal{F}_T$$

Pasting von Q_1 und Q_2 in σ. Weiterhin heißt eine Menge $\mathcal{Q}$ stabil, falls für alle $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}$ und $\sigma \in \mathcal{T}$ auch das entsprechende $\tilde{Q}$ in $\mathcal{Q}$ ist.

3. Aufgabe (5 Punkte)
Es sei $Q_1 \approx Q_2$ und $\sigma \in \mathcal{T}$. Weiterhin sei $\tilde{Q}$ das Pasting von Q_1 und Q_2 in σ und Z der Dichteprozess von Q_2 bezüglich Q_1. Man zeige

(i) Es gilt $Q_1 \approx \tilde{Q}$ und

$$\frac{d\tilde{Q}}{dQ_1} = \frac{Z_T}{Z_\sigma}.$$

(ii) Für alle Stoppzeiten $\tau \in \mathcal{T}$ und $\mathcal{F}_T$-messbare Zufallsvariable $Y \geq 0$ gilt

$$\mathbb{E}_{\tilde{Q}}[\, Y \,|\, \mathcal{F}_\tau \,] = \mathbb{E}_{Q_1}\big[\, \mathbb{E}_{Q_2}[\, Y \,|\, \mathcal{F}_{\sigma \vee \tau} \,] \,|\, \mathcal{F}_\tau \,\big].$$

4. Aufgabe (5 Punkte)
Es sei ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$ gegeben. Ein Ansatz zur Modellierung von Insiderinformationen ist die schwache Information. D.h. allgemein auf dem Markt bekannt ist das äquivalente Martingalmaß $\mathbb{P}^*$, während das Marktmaß $\mathbb{P}$ nicht bekannt ist. Ein Insider in diesem Markt kennt, im Gegensatz zu anderen Marktteilnehmern, die "wahre" Verteilung ν eines $\mathcal{F}_T$-messbaren Funktionals Y unter $\mathbb{P}$. Damit ist die für den Insider relevante Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen gegeben durch

$$\mathcal{Q} = \{ R \approx \mathbb{P}^* \mid R \circ Y^{-1} = \nu \}.$$

Man zeige, dass im Allgemeinen die Menge $\mathcal{Q}$ nicht stabil ist. Dazu verwende man $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_4\}$.