Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Sekr. MA 7-5 / Frau Michel

Prof. Dr. Jochen Blath
Dipl.-Math. oec. Wiebke Wittmüß

WS 07/08

2. Übung zur Finanzmathematik I

Abgabe: Dienstag, den 30.10.2007 (in der Vorlesung oder im Briefkasten vor dem MA 780)

1. Aufgabe (5 Punkte)

In Analogie zu den Argumenten in der Übung zeige man, dass jeder arbitragefreie Preis π^H der Call-Option $H(\omega) = (S(\omega) - K)^+$ den folgenden Ungleichungen genügt:

$$\left(\pi^1 - \frac{K}{1+r}\right)^+ \le \pi^H \le \pi^1.$$

2. Aufgabe (5 Punkte)

Wir betrachten im Folgenden die Preise von Call-Optionen, die sich nur im Basispreis unterscheiden, dabei sei $\pi(C_K)$ der Preis der Call-Option mit Basispreis K im arbitragefreien Marktmodell, das die Call-Optionen zu den Basispreisen K_1, K_2 und $\lambda K_1 + (1-\lambda)K_2$ enthält. Man zeige mit Arbitrageargumenten (d.h. ohne mit risikofreien Maßen zu argumentieren), dass für $K_2 \ge K_1$ folgendes gilt:

(i) $\pi(C_{K_1}) \ge \pi(C_{K_2})$,

(ii) $1/(1+r)(K_2 - K_1) \ge \pi(C_{K_1}) - \pi(C_{K_2})$,

(iii) $\lambda\pi(C_{K_1}) + (1-\lambda)\pi(C_{K_2}) \ge \pi(C_{\lambda K_1 + (1-\lambda)K_2})$.

3. Aufgabe (5 Punkte)

(i) Seien Q_1, Q_2 und $\mathbb{P}$ Wahrscheinlichkeiten auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit $Q_1 \ll Q_2 \ll \mathbb{P}$. Man zeige: Es gilt $Q_1 \ll \mathbb{P}$ und
$$\frac{dQ_1}{d\mathbb{P}} = \frac{dQ_1}{dQ_2}\frac{dQ_2}{d\mathbb{P}}.$$

(ii) Es seien die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P} = \mathcal{N}(0,1)$ und $Q = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ auf dem meßbaren Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ gegeben. Gesucht wird eine Zufallsvariable $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die gilt, dass
$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{E}_Q[I_A \varphi]$$
ist, d.h. φ ist die Dichte von $\mathbb{P}$ bezüglich Q. Man bestimme φ.

4. Aufgabe (5 Punkte)

Eigenschaften von Erwartungswert und Varianz einer Zufallsvariablen.

(i) Man zeige, dass $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ gilt.

(ii) Man berechne $\mathrm{Var}[aX + b]$ für Konstanten a und b.

(iii) X sei log-normalverteilt, d.h. $X = \exp(\sigma Z + m)$, wobei $\sigma > 0$, $m \in \mathbb{R}$ und Z standardnormalverteilt sind. Man berechne Erwartungswert und Varianz von X.