Technische Universität Berlin **WS 07/08**
Institut für Mathematik
Sekr. MA 7-5 / Frau Michel

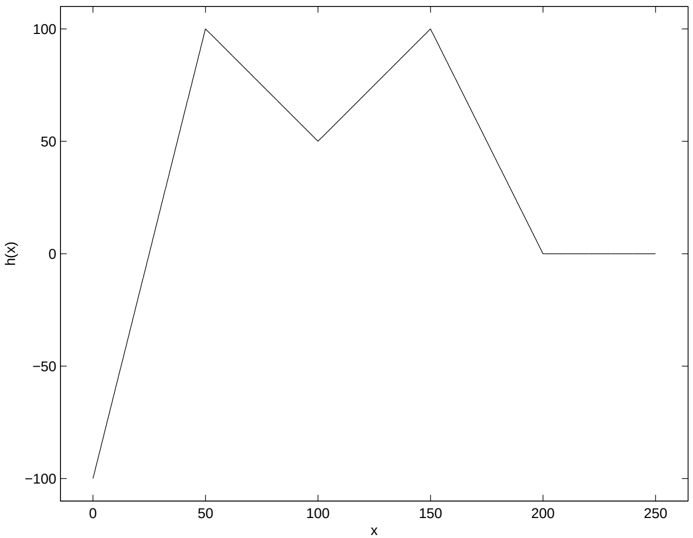
Prof. Dr. Jochen Blath
Dipl.-Math. oec. Wiebke Wittmüß

3. Übung zur Finanzmathematik I

Abgabe: Dienstag, den 6.11.2007 (in der Vorlesung oder im Briefkasten vor dem MA 780)

1. Aufgabe (5 Punkte)

(i) Man bestimme ein Kombination von Call- und Put-Optionen, die das folgende Auszahlungsprofil ergibt.



(ii) Wir betrachten nun ein Marktmodell mit drei Zuständen $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, wobei alle Zustände positive Wahrscheinlichkeit haben. In diesem Markt sei eine Aktie mit Preis $\pi^1 = 144$ und

$$S^1(\omega_i) = \begin{cases} 20, & \text{falls } i = 1 \\ 150, & \text{falls } i = 2 \\ 200, & \text{falls } i = 3 \end{cases}$$

gegeben. Man berechne in diesem Modell alle arbitragefreien Preise für eine Option auf S^1, die obigen Auszahlungsprofil folgt.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sei eine Zufallsvariable S der Form $S = \exp(\sigma Z + m)$ definiert, wobei $\sigma > 0$, $m \in \mathbb{R}$ und Z standardnormalverteilt ist. (Man sagt dann S ist *log-normalverteilt*).

Man gebe für das Ein-Perioden-Modell bestehend aus einer Anlage mit Startpreis π und Endpreis S explizit die Dichte $d\mathbb{P}^*/d\mathbb{P}$ für ein risikoneutrales Maß $\mathbb{P}^*$ an.

3. Aufgabe (5 Punkte)

Anstatt - wie in der Vorlesung - alle Preise auf den risikolosen Bond zu beziehen, kann man als “Benchmark” oder “Numéraire” auch einen “Korb” $\bar{\eta} \in \mathbb{R}^{d+1}$ von Wertpapieren mit $\bar{\eta} \cdot \bar{S} > 0$ $\mathbb{P}$-f.s. wählen, z.B. einen Aktienindex. Man zeige

(a) Die Arbitragefreiheit des Modells ist äquivalent zu jeder der beiden folgenden Bedingungen:

(i) Falls $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^{d+1}$ existiert, so dass

$$\bar{\xi} \cdot \bar{S} \geq \bar{\eta} \cdot \bar{S} \frac{\bar{\xi} \cdot \bar{\pi}}{\bar{\eta} \cdot \bar{\pi}} \mathbb{P}\text{-f.s.},$$

$$\text{dann gilt } \bar{\xi} \cdot \bar{S} = \bar{\eta} \cdot \bar{S} \frac{\bar{\xi} \cdot \bar{\pi}}{\bar{\eta} \cdot \bar{\pi}} \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

D.h. es gibt keine Anlagemöglichkeit, die den Numéraire ohne Risiko schlägt.

(ii) Die Menge

$$\mathcal{P}_\eta := \left\{ \widetilde{\mathbb{P}} \approx \mathbb{P} \;\Big|\; \frac{\pi^i}{\bar{\eta} \cdot \bar{\pi}} = \widetilde{\mathbb{E}}\Big[\frac{S^i}{\bar{\eta} \cdot \bar{S}} \Big], i = 0, \ldots, d \right\}$$

aller äquivalenten risikoneutralen Maße bezüglich des Numéraire $\bar{\eta}$ ist nichtleer.

(b) Es gilt

$$\mathcal{P}_\eta = \left\{ \widetilde{\mathbb{P}} \approx \mathbb{P} \;\Big|\; \exists\, \mathbb{P}^* \in \mathcal{P} \text{ mit } \frac{d\widetilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}^*} = \frac{\bar{\eta} \cdot \bar{S}}{(1+r)\bar{\eta} \cdot \bar{\pi}} \right\}.$$

(c) Ist $\bar{\eta} \cdot \bar{S}$ nicht $\mathbb{P}$-f.s. konstant, so gilt

$$\mathcal{P} \cap \mathcal{P}_\eta = \emptyset.$$

Insbesondere gibt es kein universelles Maß, welches simultan für jedes Numéraire risikoneutral ist.

Hinweis: Es günstig, (a)(ii) und (b) als zusammengehörig zu betrachten.

4. Aufgabe (5 Punkte)

Wir betrachten ein Marktmodell mit 4 Zuständen (wobei alle eine positive Wahrscheinlichkeit haben) und 3 Anlagen. Es sei $\bar{\pi} = (1, 4, 3)$, $\bar{S}(\omega_1) = (1, 2, 0)$, $\bar{S}(\omega_2) = (2, 8, 4)$, $\bar{S}(\omega_3) = (1, 5, 5)$ und $\bar{S}(\omega_4) = (0.5, 2, 1)$.

a) Man berechne die Menge der äquivalenten Martingalmaße bei Numéraire S^0.

b) Wenn wir eine vierte Anlage mit $\pi^3 = 4$ und $S^3(\omega_1) = 4$, $S^3(\omega_2) = 4$, $S^3(\omega_3) = 4$, $S^3(\omega_4) = 4$ einführen, ist dann der entstehende Markt arbitragefrei? Ist der Markt vollständig? Ist S^3 mit den ersten drei Anlagen erreichbar?

c) Jetzt sei die vierte Anlage gegeben durch $\pi^3 = 5$, $S^3(\omega_1) = 10$, $S^3(\omega_2) = 4$, $S^3(\omega_3) = 4$, $S^3(\omega_4) = 1$. Ist dieser Markt arbitragefrei? Ist der Markt vollständig? Ist S^3 mit den ersten drei Anlagen erreichbar?