Technische Universität Berlin **WS 07/08**
Institut für Mathematik
Sekr. MA 7-5 / Frau Michel

Prof. Dr. Jochen Blath
Dipl.-Math. oec. Wiebke Wittmüß

4. Übung zur Finanzmathematik I

Abgabe: Dienstag, den 13.11.2007 (in der Vorlesung oder im Briefkasten vor dem MA 780)

1. Aufgabe (5 Punkte)
Seien $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1$ eine σ-Algebra. Dann gilt für alle $Y_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P})$:

$$\mathbb{E}[(X - Y_0)^2] \geq \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_0])^2]$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $Y_0 = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_0]$ $\mathbb{P}$-f.s. D.h. die bedingte Erwartung minimiert den erwarteten quadratischen Prognosefehler in der Klasse $L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P})$.

Bemerkung: Im Hilbertraum $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ist die bedingte Erwartung also gerade die orthogonale Projektion auf den abgeschlossenen Unterraum $L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P})$. Der allgemeine Existenzsatz für orthogonale Projektionen auf abgeschlossenen Unterräumen kann also für einen alternativen Existenzbeweis für bedingte Erwartungen von Zufallsvariablen in L^2 benutzt werden. (Der allgemeine Fall kann dann noch mit einem Approximationsargument behandelt werden.)

2. Aufgabe (5 Punkte)
Sei H eine beliebiger Contingent Claim auf einem Markt mit nur einer Aktie und Zinssatz $r = 0$. Man löse folgendes Optimierungsproblem:

$$\min \{\mathbb{E}[\,(H - \bar{\xi} \cdot \bar{S})^2\,] \mid \bar{\xi} \in \mathbb{R}^2\}.$$

3. Aufgabe (5 Punkte)
In der Vorlesung wurde ein Beispiel eines Marktes mit nur einer riskanten Anlage betrachtet. Für die riskante Anlage galt: $\pi = 100$, $S(\omega^-) = 90$ und $S(\omega^+) = 120$. Der Zinssatz ist $r = 0$. Dann ist laut Vorlesung der Preis einer Call-Option zum Strike $K = 100$ gerade 20/3.

Nun nehmen wir an, dass wir das Maß $\mathbb{P}$ kennen: Es sei

(i) $\mathbb{P}[\{\omega^-\}] = 1/2$ und $\mathbb{P}[\{\omega^+\}] = 1/2$.

(ii) $\mathbb{P}[\{\omega^-\}] = 3/4$ und $\mathbb{P}[\{\omega^+\}] = 1/4$.

Als Preis für die Option wird nun der Erwartungswert der Auszahlung unter $\mathbb{P}$ benutzt. Man gebe jeweils eine Arbitragemöglichkeit an.

4. Aufgabe (5 Punkte)
Wir betrachten ein Marktmodell auf $\Omega = \{1, 2, \ldots\}$ mit $\mathcal{F} = 2^\Omega$. Gegeben seien $S^0 \equiv 1$ und unendlich viele riskante Assets

$$S^n(\omega) = \omega I_{\{1,2,\ldots n\}}(\omega), \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Für eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathbb{P}^*$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ definieren wir das Preissystem

$$\pi^i := \mathbb{E}^*[S^i], \qquad (i = 0, 1, \ldots).$$

Man zeige, dass dann $\mathbb{P}^*$ das eindeutige risikoneutrale Maß ist.