Technische Universität Berlin **WS 07/08**
Institut für Mathematik
Sekr. MA 7-5 / Frau Michel

Prof. Dr. Jochen Blath
Dipl.-Math. oec. Wiebke Wittmüß

5. Übung zur Finanzmathematik I

Abgabe: Dienstag, den 20.11.2007 (in der Vorlesung oder im Briefkasten vor dem MA 780)

1. Aufgabe (5 Punkte)
Es sei ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0,1,\dots,T}, \mathbb{P})$ gegeben. (Eine aufsteigende Folge von σ-Algebren $(\mathcal{F}_t)_{t=0,1,\dots,T}$ heißt Filtration, d.h. insbesondere gilt $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \ldots \subset \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}$.)

Dann heißt $M = (M_t)_{t=0,1,\dots,T}$ Martingal (bezüglich $\mathbb{P}$ und $(\mathcal{F}_t)_{t=0,1,\dots,T}$), falls gilt

(i) M_t ist $\mathcal{F}_t$-meßbar für $t = 0, 1, \dots, T$,

(ii) $M_t \in L^1(\mathbb{P})$ für $t = 0, 1, \dots, T$ und

(iii) $\mathbb{E}[\, M_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1} \,] = M_{t-1}$ für $t = 1, \dots, T$.

a) Man zeige, dass die Aussage (iii) äquivalent zu den folgenden Aussagen ist.

1) $\mathbb{E}[\, \Delta M_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1} \,] = 0$ für $t = 1, \dots, T$, wobei $\Delta M_t := M_t - M_{t-1}$.

2) $\mathbb{E}[\, M_t \,|\, \mathcal{F}_s \,] = M_s$ für alle $0 \leq s \leq t \leq T$.

b) Man zeige, dass für ein Martingal M mit $M_t \in L^2$ $(t = 0, \dots, T)$

$$\mathbb{E}[\,(M_t - M_s)^2\,] = \mathbb{E}[\,M_t^2 - M_s^2\,] \qquad \text{für } 0 \leq s \leq t \leq T$$

gilt.

c) Sei M ein Martingal und $\xi = (\xi_t)_{1 \leq t \leq T}$ beschränkt mit ξ_t ist $\mathcal{F}_{t-1}$-meßbar $(1 \leq t \leq T)$. Man zeige, dass dann $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$ gegeben durch

$$X_t = \begin{cases} \sum_{i=1}^t \xi_i (M_i - M_{i-1}), & \text{für } 1 \leq t \leq T \\ 0, & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

ein Martingal ist.

2. Aufgabe (5 Punkte)
Man beweise die beiden folgenden Aussagen.

a) Die symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ bis zur Zeit T ist ein Martingal.

b) Seien $Y_1, \dots, Y_T$ unabhängige Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $Y_i > 0$ $\mathbb{P}$-f.s. und $\mathbb{E}[Y_i] = 1$.

Dann ist

$$M_0 := 1 \text{ und } M_t := \Pi_{s=1}^t Y_s, \qquad 1 \leq t \leq T$$

ein Martingal bezüglich der Filtration $\mathcal{F}_t = \sigma(M_0, \dots, M_t)$, $\quad 0 \leq t \leq T$.

3. Aufgabe (5 Punkte)
Wir betrachten ein Finanzmarktmodell auf $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$, bestehend aus einem Bond mit Zinsrate $r = 0$ und einem risikobehafteten Wertpapier mit

$$\pi^1 = 1, \qquad 0 < S^1(\omega_1) < S^1(\omega_2) < \ldots < S^1(\omega_N).$$

Dabei nehmen wir an, dass alle Zustände positive Wahrscheinlichkeit haben und der Markt arbitragefrei ist.

Man zeige, dass es Call-Optionen $C^1, \dots, C^{N-2}$ mit Preisen $\pi^1, \dots, \pi^{N-2}$ gibt, die den Markt vervollständigen. Dabei soll die Arbitragefreiheit erhalten bleiben.

4. Aufgabe (5 Punkte)
Wir betrachten ein Modell mit zwei Zuständen ω_1, ω_2, wobei $\mathbb{P}[\omega_1] = p \in (0, 1)$ gelten soll. Es gibt eine Aktie auf diesem Markt, für die

$$S^1(\omega_i) = \begin{cases} (1+b)\pi^1, & \text{falls } i = 1 \\ (1+a)\pi^1, & \text{falls } i = 2 \end{cases}$$

für $a, b \in (-1, \infty)$ ist. Für die risikolose Anlage gilt $S^0 \equiv 1 + r$ mit $a < r < b$. Weiterhin sei eine Call-Option auf die Aktie mit Strike K gegeben.

a) Man beweise, dass der Optionspreis in a fallend und in b wachsend ist.

b) Die Volatilität der Aktie beschreibt wie stark der Aktienpreis schwankt und ist als $\mathrm{Var}[S^1/S^0]$ definiert. Man gebe ein Beispiel dafür an, dass der Optionspreis nicht mit der Volatilität wachsen muss. Dazu wähle man $r = 0$ und $\pi^1 = 1 = K$.